Benoit Rittaud

LA FAVOLOSA STORIA DELLA RADICE QUADRATA DI DUE

L'idea che i numeri abbiano una storia è già sufficiente, di per sé, a farli apparire sotto una luce meno algida. Se poi si tratta di una storia quattro volte millenaria, piena di colpi di scena e dagli esiti ancora aperti, come in questo caso, allora siamo di fronte a uno sconvolgimento, perché la matematica ci rivela il suo lato avventuroso, spericolato e al tempo stesso familiare, il più insospettabile per chi è abituato a collocarla in un cielo immobile e remoto. Benoît Rittaud ci guida in un percorso che ha del romanzesco: protagonista assoluta, la radice quadrata di due, il primo numero irrazionale a essere riconosciuto come tale. Irrazionale perché la ricerca del suo valore numerico dà luogo a un risultato con infinite cifre decimali in successione priva di apparente regolarità, tanto che ancora oggi i matematici non sono riusciti a stabilire se la loro sequenza abbia o meno caratteristiche del tutto casuali. La scoperta dell'irrazionalità della radice di due - attribuita già in epoca ellenistica alla scuola pitagorica - fu tutt'altro che indolore, anzi costituì per la mentalità greca un vero scandalo logico. Secondo la leggenda, il suo scopritore non scampò all'ira divina per averne divulgato il segreto. Un'ombra cruenta che non stinge sulle vicende posteriori, dove si intrecciano astrazione calcolistica e

risvolti pratici. Che cosa infatti accomuna la musica, il formato della carta e la fotografia, se non il fatto che vi gioca un ruolo fondamentale la radice quadrata di due?

Indice

Ringraziamenti

Quest'opera ha tratto beneficio da molti fertili scambi di idee, che hanno contribuito moltissimo alla sua realizzazione. Ciò non significa affatto che le opinioni e gli eventuali errori contenuti nel libro debbano essere attribuiti in qualche modo a tutti quelli che hanno accettato di aiutare o consigliare nelle sue ricerche l'autore di queste pagine. Quest'ultimo ringrazia in modo particolare Pierre Arnoux, Daniel Barsky, Pierre Damphousse, Yannis Delmas-Rigoutsous, Claudia De Oliveira Gomes, Marcus Kuhn, Michel Mendès-France, Marguerite Neveux, Roshdi Rashed, Alain Schuhl, Laurent Vivier, Marie-Claude Werquin, Alain Wuilbaut e Thomas Zabulon. L'autore ringrazia inoltre per il loro aiuto e i loro suggerimenti Luc Allemand, Samir Atek, Marouane Ben Miled, Alain Bernard, Maurice Brock, Claude-Paul Bruter, Jean-Paul Cardinal, André Cauty, Stéphane Denépoux, Jean Dhombres, Ahmed Djebbar, Stéphane Douady, Yves Dupain, Jean-Louis Foulley, André Gramain, Alain Grigis, Shigeru Kondo, Valérie Laurent, Hervé Lehning, Olivier Lengard, David Lister, Gwenola Madec, Pierre-Jean Mercier, Ian Mueller, Robert Nemiroff, Simon Plouffe, Jean-Paul Sautel, Michel Schneider, Éric Serra, Daisuke Takahashi, Claude Villers, Gerhard Wanner e Andrew Wiles.

L'aritmogramma di $\sqrt{2}$

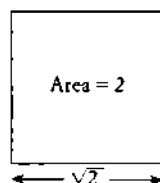
> L'aube a véçu: de l'air perce, subtil et vif.
> Euclide est transporté. Sidérante magie
> Dupliquant sans rapports, ampleurs inabouties.
> Ô raisons! Théodore! Exégètes pensifs!
> Au côté du quadrangole, incapable mesure,
> Diagonale toujours étonnement procure...

Il neologismo che proponiamo, «aritmogramma», indica una poesia composta in modo tale che il numero di lettere di ogni parola corrisponda a una regola numerica prestabilita. In questo caso si tratta delle prime 36 cifre decimali della radice quadrata di 2, che ritroviamo nel testo precedente secondo questa regola: a ogni cifra dello sviluppo decimale di $\sqrt{2}$ corrisponde una parola formata dallo stesso numero di lettere (l'unica eccezione riguarda lo zero, rappresentato da una parola di 10 lettere). Dunque «L'aube a véçu» dà 1,414; il seguito permette di scrivere: $\sqrt{2} = 1{,}4142135623730950488016887242096980 7\ldots$

Esiste un aritmogramma celebre, costruito a partire dalle cifre decimali del numero pi greco. Di origini oscure (le sue tracce risalgono almeno all'inizio del XX secolo), ci dà le prime 31 cifre decimali di π: «Que j'aime à faire apprendre / Un nombre utile aux sages. / Immortel Archimède, artiste, ingénieur, / Qui de ton jugement peut priser la valeur? / Pour moi, ton problème eut de pareils avantages ...». Vari autori ne hanno proposto estensioni che danno un numero di cifre decimali ancora più lungo, e se ne conoscono versioni equivalenti in altre lingue;[1] sembra invece che nessuno abbia mai pensato di utilizzare le cifre decimali di qualche altro numero.

[1] Se ne conosce una versione italiana, che risale al 1936: «Ave o Roma, o madre gagliarda di latine virtù che tanto luminoso splendore spargesti con la tua saggezza».

Premessa

La radice quadrata di 2, che vale approssimativamente 1,414213562, è, secondo la definizione attualmente più in voga, «il numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2». È anche «la radice del quadrato di dimensioni pari a 2», ovvero la lunghezza del lato di un quadrato di area 2. È questo carattere geometrico che fa di questa «radice» un punto di partenza, un'origine.

Un quadrato di area 2 ha il lato pari a $\sqrt{2}$, ovvero $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

Entrambe le definizioni potrebbero farci pensare di avere a che fare con un numero buono solamente a esprimere la soluzione di un problema di geometria per degli studenti cui si chieda di imparare che l'area A di un quadrato di lato a è data dalla formula $A = a^2$. In realtà, non solo i due aspetti (quello algebrico e quello geometrico) hanno numerosissime conseguenze in direzioni spesso inattese, ma la radice quadrata di 2 ammette ulteriori definizioni, e anche queste danno vita a ramificazioni che si estendono ben oltre il semplice calcolo dell'area di un quadrato. È così che i campi in cui interviene questo numero almeno quattro volte millenario nella storia del pensiero sono di una varietà pressoché infinita.

Se la radice quadrata di 2 fosse un personaggio, forse sarebbe la dea Atena nel pantheon dei numeri. Entrambe, infatti, ispirano tanto le azioni degli artigiani e degli ingegneri quanto le riflessioni intellettuali di un Platone. Entrambe rappresentano il rigore, ed entrambe appaiono in situazioni assai diverse tra loro. Infine, proprio come la protettrice di Atene si mostra attenta sia ai bambini che ai guerrieri più valorosi, la radice di 2 si rivela utile tanto ai semplici dilettanti quanto ai matematici più smaliziati, offrendo a tutti quanti un'occasione per meravigliarsi, scoprire e imparare. Con lei siamo ben lontani da quell'altro inquilino dell'Olimpo matematico che è il numero pi greco (π), il rapporto tra la circonferenza di un cerchio e il suo diametro, che vale più o meno 3,14. Molti matematici lo considerano, tra i numeri, come «il più glorioso, il più grande», per usare le parole pronunciate nell'*Iliade* da Agamennone a proposito di Zeus. Proprio come il dio sovrano della mitologia greca, però, π si rivela spesso di una potenza soffocante: molte delle sue proprietà sono difficili da determinare, e non sono pochi i dilettanti e i matematici che faticano a cogliere il senso profondo della dimostrazione dei tanti risultati significativi sul «re dei numeri». La radice di 2, dal canto suo, è più accessibile, pur mettendo in mostra una gran quantità di ricchezze e di splendori matematici.

Una caratteristica che accomuna molti membri dell'Olimpo dei numeri è la proprietà di «irrazionalità». Si dice che un numero è irrazionale quando non può essere ottenuto come risultato della divisione di un numero intero per un altro: così, per definizione, i numeri 8/5, 1/3 o 287 645/1000 sono tutti numeri razionali (le loro espressioni decimali sono, rispettivamente, 1,6, 0,333333... e 287,645). La radice di 2, invece, non può essere associata ad alcuna frazione. Certo, alcune approssimano $\sqrt{2}$ con la precisione che si desidera, come 7/5 (che vale 1,4), 14 142/1000 (che vale 1,4142) o 577/408 (che vale approssimativamente 1,414216), ma nessuna di loro esprime in maniera esatta il valore della radice di 2, tanto è restia quest'ultima a qualsiasi rappresentazione frazionaria.

La nozione di irrazionalità è una delle più importanti di tutta la matematica. Anche se la radice di 2 non è affatto il solo numero irrazionale, ci sono tuttavia due ragioni che spingono a prenderla spesso come esempio. La prima è che, a differenza di altri numeri

irrazionali «abituali» (come π), è possibile dimostrarne il carattere irrazionale con un bagaglio matematico molto ridotto; in altre parole, se gli irrazionali sono «i più complicati tra i numeri», la radice di 2 è, in un certo senso, il più semplice di questi numeri complicati. La seconda ragione è che forse la radice di 2 è stata il primo numero irrazionale riconosciuto come tale.

Bisogna però constatare che, malgrado la notorietà che le viene dal suo doppio status di irrazionale e di decana putativa della categoria, la radice di 2 non riceve spesso molta attenzione. Dalla lettura delle innumerevoli presentazioni generali della teoria dei numeri sembra che il rango matematico della radice di 2 non vada oltre quello dell'eterno esempio semplice, che permette di introdurre la nozione di numero irrazionale e di evocare qualche fatto storico. Chissà, forse è proprio perché costituisce il pane quotidiano dei matematici che ci si dimentica di dedicarle più attenzione. Forse la radice di 2 viene usata troppo spesso perché possa nascere spontanea l'idea di guardarla con la stessa curiosità che ci spinge ad ammirare le meraviglie nascoste e inattese di pi greco.

Una prima caratteristica interessante della radice di 2 è che essa rappresenta una porta aperta su interi settori della matematica, sia antica che moderna: la geometria e la teoria dei numeri, ma anche la logica, l'algebra, l'aritmetica, l'analisi e, più recentemente, l'algoritmica, le strutture di dati, i numeri *g*-adici e la dinamica simbolica. Ovviamente la radice di 2 non è al centro di tutte le teorie di cui permette di parlare, ma la quantità incredibile di contesti in cui è in grado di fornire un filo conduttore basta a giustificare il posto che le viene riservato nel pantheon dei numeri. Era proprio questa, d'altro canto, l'intenzione iniziale di questo libro: utilizzare la radice di 2 come punto di partenza verso destinazioni che offrano allo sguardo alcuni dei più bei paesaggi matematici. Ispirandoci all'esempio di Srinivasa Ramanujan, il matematico indiano del XX secolo di cui si diceva che vivesse circondato dai numeri come se ognuno di essi fosse per lui un amico intimo, abbiamo pensato di prendere la radice di 2 come semplice compagna di viaggio, per condividere con il lettore avventure intellettuali impensabili al di fuori del mondo matematico. E così nelle prossime pagine la vedremo spesso in questo ruolo così prezioso (è un punto di vista utilizzato in un libro di David Flannery, *The Square Root of 2*, pub-

blicato nel 2006: concepito in forma di dialogo tra un professore e un suo studente, il libro utilizza $\sqrt{2}$ essenzialmente come strumento pedagogico).

A un'analisi più approfondita, però, si vede che la radice di 2 è ben di più di una semplice guida. Costante matematica fondamentale, proprio come lo sono per la fisica la velocità della luce o la carica dell'elettrone, la radice di 2 è un numero dai mille volti, non solo teorici ma anche pratici e storici. Certo, questo non vuol dire che in tutti i risultati e in tutte le osservazioni che incontrerete nel seguito del libro si debbano ricercare a ogni costo delle caratteristiche particolari di $\sqrt{2}$. In matematica, infatti, non ha senso parlare di un'entità isolandola da tutte le altre. Le proprietà più interessanti di $\sqrt{2}$ si manifestano soprattutto attraverso il loro legame con gli altri numeri. Nel condividere certe sue proprietà con altri numeri, la radice di 2 si trasforma nell'anello di una catena di numeri legati indissolubilmente da qualche particolarità: grandezza geometrica, quantità irrazionale, radice quadrata, numero algebrico, numero quadratico, «*k*-numero aureo»... (tutti questi termini saranno spiegati a tempo debito). Ognuna delle proprietà della radice di 2 cui ci interesseremo farà luce a modo suo su uno di questi aspetti, talmente vari che diventa davvero difficile trovare un altro numero capace di lasciare un'impronta analoga su contesti così diversi come la musica, l'architettura o la fotografia.

«A quando un libro sulla radice quadrata di 3?» ci ha già chiesto qualche burlone sentendoci annunciare la nascita di quest'opera. Potremmo prenderli in parola: per visitare i territori della matematica, $\sqrt{3}$ sarebbe una guida assolutamente accettabile, cui hanno dedicato la propria attenzione Platone e Archimede, per non parlare del Palladio. Ciononostante, per quel che ne sappiamo, la diversità di cui parlavamo a proposito della radice di 2 si ritrova solo in parte in un numero come $\sqrt{3}$, e sparisce quasi del tutto per la maggior parte degli altri numeri.

Tra i pochissimi numeri dotati di una molteplicità di caratteristiche paragonabile a quella della radice di 2 c'è il «numero aureo», φ, pari a $(1 + \sqrt{5})/2$ (cioè circa 1,618). Anche questo Apollo della matematica, vero e proprio fratello della radice di 2, è presente al tempo stesso nella matematica pura e nella realtà più concreta. Il legame tra queste due costanti fondamentali è così profondo che

diventa difficile decidere quale delle due sia «la più notevole». Interessarsi alle proprietà dell'una, d'altra parte, si rivela spesso utile per mettere in evidenza certe caratteristiche dell'altra. Le relazioni che legano $\sqrt{2}$ a φ, così come quelle che osserviamo tra $\sqrt{2}$ e π, mostrano che i numeri notevoli, anziché essere estranei gli uni agli altri, costituiscono una sola e unica famiglia.

Quest'opera è al tempo stesso un libro divulgativo e un saggio. È un libro divulgativo perché, da un lato, non presuppone conoscenze matematiche particolari se non un minimo di abitudine al ragionamento e all'astrazione, e dall'altro, spesso, preferisce mostrare anziché dimostrare: impossibile, dunque, che possa rimpiazzare le opere specialistiche dedicate agli argomenti trattati. È un saggio perché riunisce, insieme a qualche elemento storico apparentemente sconosciuto, un insieme di riflessioni personali su un soggetto che non sembra aver ancora ricevuto l'attenzione che meriterebbe. Alcune di queste riflessioni sono all'origine della scoperta di qualche risultato matematico nuovo, pubblicato per la prima volta in questo libro.

Abbiamo fatto particolarmente attenzione a dare alle varie parti dell'opera la massima indipendenza possibile, per consentire al lettore di navigare liberamente dall'una all'altra e per eliminare quegli ostacoli di natura tecnica che potrebbero impedire a un lettore meno esperto di avanzare nella lettura. Anche se il libro è stato realizzato seguendo una progressione ben precisa, nulla vieta di leggerlo nell'ordine che si preferisce (anche se, in linea generale, il livello di difficoltà aumenta progressivamente all'interno delle varie parti). Gli aspetti matematici più tecnici, che, per quanto possibile, sono stati racchiusi in inserti, possono essere saltati, lasciandoli a una seconda lettura.

Se quello storico è un aspetto della radice di 2 che attraversa tutta l'opera, la prima parte è dedicata in maniera più specifica alla dimensione concettuale di questo numero nato quattromila anni fa. Dai tempi della civiltà babilonese l'atteggiamento nei confronti di questa entità misteriosa ha subito un'evoluzione profonda. Esempio, o simbolo, di riflessioni talvolta ben lontane dalla matematica propriamente detta – come quando fu utilizzata, dall'antichità greca al Medioevo occidentale, per combattere l'idea che la materia fosse composta da atomi – in tutta la storia del pensiero la radice

di 2 è stata una vera e propria cavia, utilizzata per mettere alla prova, descrivere e promuovere concetti nuovi.

Come abbiamo già detto, una delle caratteristiche principali della radice di 2 è il fatto di essere un numero irrazionale. Lo si può dimostrare in molti modi diversi, e la seconda parte del libro si sofferma su quelli che richiedono l'arsenale teorico più leggero. Alcune di queste dimostrazioni sfociano in universi matematici che esploreremo facendoci guidare dalla radice di 2.

Meno matematica delle precedenti, la terza parte si interessa alle applicazioni pratiche della radice di 2. La relazione tra la radice di 2 e la diagonale del quadrato fa di $\sqrt{2}$ la «duplicatrice delle aree», una proprietà che ha attirato l'attenzione tanto del filosofo Socrate quanto dell'architetto Vitruvio. In qualità di «media geometrica di 1 e 2», la radice di 2 è di interesse per i teorici della musica. Essendo «il numero uguale al doppio del suo inverso», la radice di 2 è all'origine dei formati cartacei normalizzati che utilizziamo quotidianamente. Infine, i riferimenti alla radice di 2 che troviamo in architetti del Rinascimento come il Palladio o Leon Battista Alberti le valgono un rapporto privilegiato con il mondo dell'arte.

Una volta stabilita l'importanza pratica della radice di 2 si pone il problema di calcolarne il valore effettivo. La quarta parte del libro, in cui si manifestano i legami stretti e inattesi tra la radice di 2 e pi greco, è dedicata al numero di decimali di $\sqrt{2}$ che bisogna conoscere per soddisfare le necessità pratiche, al modo di calcolarli, alla storia dei record di tale calcolo e, per finire, a una questione di natura teorica: capire se la sequenza infinita di cifre decimali di $\sqrt{2}$ possiede o no proprietà statistiche identiche a quelle di una successione di cifre estratte a caso, indipendentemente le une dalle altre. Si tratta di un problema ancora irrisolto, formulato un secolo fa e considerato uno dei più difficili della matematica contemporanea.

Il sistema di numerazione decimale costituisce una rappresentazione dei numeri così comoda e familiare che spesso ci si dimentica di considerarlo per ciò che è realmente: un sistema di rappresentazione tra tanti altri. Frazioni continue, rappresentazioni sturmiane e altri approssimanti di Farey sono altrettanti sistemi alternativi che consentono di cogliere in maniera molto più profonda alcune proprietà della radice di 2. Ne troverete una presentazione nella quinta parte del libro. Sfruttando queste nuove pro-

spettive nella rappresentazione dei numeri, la sesta e ultima parte spiega perché la radice di 2 è un numero irrazionale «estremo» e quali sono le conseguenze di ciò. Il finale è dedicato alle relazioni che uniscono, in cima alla piramide dei numeri, la radice di 2 e il numero aureo.

Ad Atena, «dea dagli occhi scintillanti», i Greci hanno consacrato quel capolavoro eterno che è il Partenone, simbolo di un'intera civiltà. C'è stato un momento in cui, non senza un certo candore, abbiamo creduto che saremmo riusciti a erigere «il tempio della radice di 2». Ora che si è resa palese l'immensità di una tale ambizione non possiamo fare a meno di sorridere dell'irragionevolezza della nostra pretesa iniziale. Per quanto voluminosa, quest'opera non riesce a delineare in maniera esauriente il panorama delle innumerevoli ramificazioni di un numero così ricco di storia, di proprietà, di applicazioni e di misteri.

NB1: per una migliore leggibilità, i riferimenti bibliografici e gli indirizzi Internet, salvo eccezioni, non sono riportati esplicitamente nel testo. Si è preferito dare ogni volta il minimo di indicazioni possibili (autore, data) affinché il lettore possa identificare facilmente nella bibliografia (pp. 397-405) il riferimento in questione.

NB2: i lettori interessati troveranno su Internet, all'indirizzo http://www.math.univ-paris13.fr/~rittaud/RacineDeDeux, un sito dedicato a questo libro. Oltre a raccogliere gli indirizzi dei siti Internet citati nella bibliografia, il sito è destinato ad accogliere osservazioni, aggiornamenti, aggiunte ed eventuali correzioni.

Un piccolo ripasso di matematica

Troverete qui riuniti alcuni richiami a concetti di base. La lettura del libro non deve necessariamente cominciare da questa sezione, visto che molti di queste note sono presenti anche nel testo, perlomeno la prima volta che viene utilizzato il concetto matematico corrispondente. Questa sezione nasce con l'obiettivo di riunire in uno stesso posto dei riferimenti utili che consentano al lettore di ritrovare con facilità la spiegazione di questa o quella nozione.

Lettere che indicano oggetti

Per indicare un oggetto matematico si utilizzano le lettere dell'alfabeto romano o di quello greco (nel primo caso, le si scrive in corsivo). Così, possiamo parlare di un rettangolo di lati a e b, di un angolo α o di un cerchio C di cui O è l'origine e r il raggio. Talvolta ci si serve della notazione indiciale, ad esempio per designare con C_1 e C_2 due cerchi, rispettivamente, di centro O_1 e O_2 e di raggio r_1 e r_2 (1 e 2 sono «indici», e il loro valore numerico non ha importanza). Capita anche di dover definire una quantità ignota n di oggetti, ad esempio una sequenza di numeri x_1, x_2, ecc. fino a x_n. L'espressione x_k, in questo caso, indica uno di questi numeri (l'indice, k, può essere uno dei numeri interi compresi tra 1 e n).

Quadrati, radici quadrate e altro ancora

La radice quadrata di un numero x, indicata da $\sqrt{x}$, è il numero positivo che, moltiplicato per se stesso, dà x. La radice quadrata di 4, quindi, è pari a 2; analogamente, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt{100} = 10$, e così via. Moltiplicare un numero per se stesso si dice «elevare al quadrato»:

$x \times x$ è il «quadrato» del numero x, che possiamo indicare anche con x^2. Quindi la radice quadrata di x è il numero positivo y tale che $y^2 = x$.

Analogamente, il cubo del numero x, che indichiamo con x^3, corrisponde al valore di $x \times x \times x$. Ad esempio, $4^3 = 64$. La radice cubica di $x, \sqrt[3]{x}$, è quel numero y tale che $y^3 = x$. Lo stesso procedimento permette di definire la potenza quarta, quinta, e, più generalmente, la potenza n-esima di x (indicate rispettivamente da x^4, x^5 e x^n), e, analogamente, la radice quarta, quinta e più generalmente n-esima (indicate rispettivamente da $\sqrt[4]{x}$, $\sqrt[5]{x}$ e $\sqrt[n]{x}$). Per convenzione, dato un qualunque numero x, l'espressione x^0 ha valore 1 (a patto, però, che x non valga 0: ragioni di ordine matematico fanno sì che l'espressione 0^0 non abbia un senso «ragionevole»).

Si dice che un numero intero è un «quadrato perfetto» quando la sua radice quadrata è un numero intero. I numeri 9 ($= 3^2$), 25 ($= 5^2$), e 256 ($= 16^2$) sono quadrati perfetti, e le loro radici quadrate sono, rispettivamente, 3, 5 e 16.

Una proprietà delle radici quadrate è quella per cui, dati due numeri positivi qualunque a e b, si ha $\sqrt{(ab)} = (\sqrt{a}) \times (\sqrt{b})$. Ad esempio, $\sqrt{64} = \sqrt{(4 \times 16)} = (\sqrt{4}) \times (\sqrt{16})$ (da cui si ottiene 2×4, cioè 8). Analogamente, $\sqrt{8} = \sqrt{(4 \times 2)} = (\sqrt{4}) \times (\sqrt{2}) = 2 \times \sqrt{2}$, che viene solitamente indicato, per brevità, con $\sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$, o anche $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Attenzione, quindi, a non confondere $3\sqrt{2}$ (tre volte la radice quadrata di 2) con $\sqrt[3]{2}$ (radice cubica di 2). Attenzione anche all'addizione: di norma, $\sqrt{(a+b)}$ non è uguale a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

La «regola dei segni» afferma che il prodotto di due numeri negativi è un numero positivo (e che il prodotto di un numero negativo per uno positivo è un numero negativo): ad esempio, $(-2) \times \times (-3) = 6$, ma $(-2) \times 3 = -6$. Perciò il prodotto di un numero per se stesso è sempre un numero positivo, da cui si deduce che solo i numero positivi hanno una radice quadrata; ad esempio, non esiste un numero x tale che $x \times x = -1$ (a meno che non si considerino i «numeri complessi», ma quella è tutta un'altra storia). Allo stesso modo, non esiste la radice quarta, sesta, ecc. di un numero negativo. Esiste invece la radice cubica di -8 (è -2), così come esiste, in generale, la radice quinta, settima, ecc. di un numero qualunque.

Scrivere i numeri interi

Rappresentare un numero intero in base 10 significa fare dei pacchetti di dieci, cento, mille, e così via, vale a dire dei pacchetti di potenze di dieci ($10 = 10^1$, $100 = 10^2$, $1000 = 10^3$, ecc.). Quando scriviamo 52 804, per fare un esempio, si tratta del numero $(5 \times 10\,000) + (2 \times 1000) + (8 \times 100) + (0 \times 10) + 4$, ovvero $(5 \times 10^4) + (2 \times 10^3) + (8 \times 10^2) + (0 \times 10^1) + (4 \times 10^0)$: cinque decine di migliaia, due migliaia, otto centinaia, zero decine e quattro unità. Un altro modo di vedere la cosa consiste nel pensare a un numero intero come a un insieme di sassi, e alle potenze di dieci come altrettanti «sacchi» per raccogliere i sassi. Data una certa quantità di sassi, si prende il sacco più grande che possa essere riempito completamente e lo si riempie; poi si ripete l'operazione con i sassi rimanenti. Così, quando a partire dal mucchio di sassi abbiamo riempito 5 sacchi da diecimila, 2 da mille, 8 da cento e ci restano 4 sassi, possiamo associare all'insieme dei sassi il numero totale 52 804.

Se al posto del numero dieci si prende un altro intero b (maggiore di uno) si ha un sistema di rappresentazione dei numeri «in base b», che invece delle cifre da 0 a 9 utilizza quelle da 0 a $b - 1$ (il che, quando b è maggiore di 10, costringe a introdurre qualche simbolo nuovo). Lavorando in base due, ad esempio, la dimensione dei «sacchi» successivi è due, quattro, otto, sedici, trentadue, sessantaquattro, ecc. Uno stesso numero intero, naturalmente, verrà scritto in modi diversi a seconda della base di numerazione prescelta: ad esempio, il numero settantacinque, che in base 10 si scrive 75, in base due si scrive 1001011 (in effetti il sacco più grosso che possiamo riempire è da sessantaquattro; restano così $75 - 64 = 11$ sassi, con i quali si può riempire un sacco da otto, dopo di che restano tre sassi: due di questi vanno in un sacco da due, lasciandone uno tutto solo. Abbiamo scritto 75 nella forma $(1 \times 64) + (0 \times 32) + (0 \times 16) + (1 \times 8) + (0 \times 4) + (1 \times 2) + (1 \times 1)$, ed è da qui che nasce la sequenza 1001011.

Le cifre dopo la virgola

Quando un numero non è intero, lo si scrive con delle «cifre dopo la virgola». Così, in base dieci, 27,13 indica il valore corrispondente a due decine, sette unità, due decimi e tre centesimi.

Abbiamo detto che 10^3 indica le migliaia, 10^2 le centinaia, 10^1 le decine e 10^0 le unità. Continuando sulla stessa falsariga, 10^{-1}

corrisponderà ai decimi, 10^{-2} ai centesimi, 10^{-3} ai millesimi e così via. Quindi il numero 27,13 corrisponde a $(2 \times 10^1) + (7 \times 10^0) + (1 \times 10^{-1}) + (3 \times 10^{-2})$. Il metodo funziona esattamente nello stesso modo in qualsiasi base *b* di numerazione.

Dato un numero (positivo), la sua «parte intera» è il numero intero che si ottiene trascurando le cifre dopo la virgola, mentre la sua «parte frazionaria» è il numero ottenuto sostituendo con uno zero le cifre che precedono la virgola. Quindi la parte intera di 27,13 è 27 mentre la sua parte frazionaria è 0,13 (notiamo come la somma delle due restituisce il numero di partenza, 27,13). Notiamo anche come la parte intera e la parte frazionaria di un numero non dipendano dalla base utilizzata per rappresentarlo (anche se la loro forma cambia al cambiare della base).

Decimali, razionali e irrazionali

Di un numero si dice che è «decimale» se nella sua espressione in base dieci il numero di cifre dopo la virgola è finito. Il numero 27,13, dunque, è decimale. Il numero 0,6666 ... (con il 6 ripetuto un'infinità di volte) non è decimale. In tutte le altre basi di numerazione esiste una nozione corrispondente. In base due, i numeri equivalenti ai decimali sono i «diadici».

Il fatto di poter essere scritto con un numero finito di cifre dopo la virgola dipende, per un dato numero, dalla base di numerazione utilizzata: 2/3 si scrive 0,666... in base dieci, e dunque non è decimale, ma in base tre si scrive 0,2 ($= 2 \times 3^{-1}$).

Si definisce razionale un numero risultante dalla divisione di due numeri interi. In altre parole, razionali sono tutti quei numeri esprimibili nella forma p/q, dove p e q sono interi (con q non nullo). Il numero 0,6666... è razionale (ma non decimale), in quanto uguale a 2/3. il numero $1/q$ è detto «inverso» di q. Moltiplicando q per il suo inverso si ottiene il valore 1.

Tutti i numeri decimali sono numeri razionali, poiché possono essere ottenuti dividendo un intero per una potenza di dieci (ad esempio, 27,13 è uguale a 2713/1000). In maniera più generale, ogni numero la cui espressione in base *b* ha solo una quantità finita di cifre dopo la virgola è un numero razionale; non vale però l'affermazione inversa, come dimostra l'esempio 0,6666... in base dieci.

Un numero che non è razionale viene detto irrazionale: è il caso, come vedremo, della radice di 2, ma anche di molti altri numeri.

Parte prima

Quattromila anni di storia

«Il numero, sommo tra tutte le scienze...».
Eschilo, *Prometeo incatenato*.

Le tracce più antiche di un concetto che possa essere ragionevolmente assimilato alla radice quadrata di 2 risalgono alla civiltà babilonese. Il primo capitolo è dedicato alle affascinanti testimonianze di una comprensione di $\sqrt{2}$ già molto avanzata fin dagli albori della matematica.

Una delle proprietà principali della radice di 2 è quella di essere un «numero irrazionale», ed è ai Greci antichi che siamo debitori per averlo scoperto e dimostrato. Ciò nonostante, per i Greci, che lo esprimono in termini di «grandezze incommensurabili», il «numero $\sqrt{2}$» non ha diritto di cittadinanza in quanto tale. Questo punto di vista, geometrico anziché numerico, è presentato nel capitolo 2.

È con gli Arabi, nel corso del Medioevo, che la radice di 2 acquisisce definitivamente il rango di numero, non senza sollevare una quantità di problemi di natura teorica. La radice di 2 serve da esempio in varie controversie, dagli interrogativi dei teologi medievali sulla natura della materia alle ricerche dei matematici del XIX secolo sulla costruzione rigorosa dei numeri. Tutti questi aspetti sono analizzati nel capitolo 3.

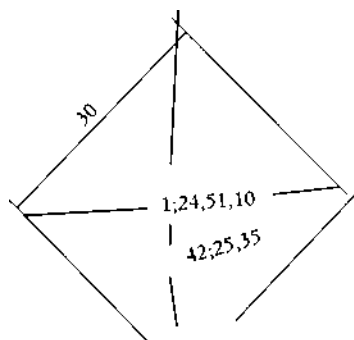
Il capitolo 4, infine, si mette nell'ottica, più moderna, delle «strutture di dati», grazie al quale la problematica dell'irrazionalità della radice di 2 assume una forma nuova. Il capitolo si conclude con una definizione della radice di 2 maturata nel corso del XX secolo a partire dalla nozione di «albero binario»: è la dimostrazione che, quattromila anni dopo i Babilonesi, l'idea che abbiamo della radice di 2 non smette di evolvere. Non ci sono dubbi: la favolosa storia di questo numero è ben lontana dalla conclusione.

1.

Segni dalle profondità del passato

Ciò che scrisse lo scriba

È una piccola tavoletta d'argilla i cui lati misurano pochi centimetri. Un oggetto semplicissimo, che sta nel palmo di una mano e sul quale sono state tracciate delle linee e sono stati incisi dei segni.

La tavoletta si trova all'Università di Yale, negli Stati Uniti, catalogata come YBC 7289 (Yale Babylonian Collection). Si tratta, probabilmente, dell'opera di uno scriba babilonese della prima dinastia, vale a dire tra il 1900 e il 1600 a. C., ed è nientemeno che l'atto di nascita di un oggetto matematico. Questa traccia quattro volte millenaria di una civiltà oggi scomparsa rappresenta

Nel nostro sistema di numerazione, 1;24,51,10 si scrive più o meno 1,41421296, e 42;25,35 all'incirca 42,4263889.

una delle più antiche incursioni dell'umanità nel mondo del pensiero scientifico.

Cosa significa, dunque, questa misteriosa tavoletta? Sono molti i testi che ci sono giunti da civiltà perdute e che ci sembrano irrimediabilmente intraducibili in quanto scritti in un linguaggio che non capiamo; nel caso della tavoletta YBC, però, la traduzione non è poi così difficile, poiché utilizza quella che è forse la lingua più universale: il linguaggio della matematica. Oggi conosciamo bene il sistema di numerazione dei Babilonesi (si veda il riquadro), e dunque siamo in grado di dare una traduzione «letterale» della tavoletta YBC 7289 (che nel disegno in alto è stata ruotata rispetto alla fotografia.

Il sistema di numerazione babilonese Verso il 2000 a. C., i Babilonesi inventano un sistema di rappresentazione dei numeri sofisticato ed efficace. I valori da 1 a 9 si scrivono servendosi di segni verticali, i «chiodi»: un chiodo per indicare 1, due chiodi per 2, e così via. Il valore 10 è rappresentato da un «punzone», un segno a forma di cuspide. I numeri da 1 a 59 si ottengono affiancando chiodi e punzoni; 25, ad esempio, si scrive 𒌋𒌋𒐊.
Per rappresentare 60 non si utilizzano sei punzoni bensì un chiodo, di forma identica a quello che simboleggia l'unità. In maniera generale, ogni sessantina di un numero è rappresentata da un chiodo: 143 (pari a $(2 \times 60) + (2 \times 10) + 3$), dunque, si scrive 𒈫𒌋𒌋𒐈. Per rap-

presentare il numero 600 si utilizza di nuovo un punzone anziché dieci chiodi, e così via.
Proprio come nel nostro sistema attuale le due cifre 3 che compaiono nel numero 343 rappresentano quantità differenti (tre centinaia per la cifra a sinistra, tre unità per quella di destra), la quantità rappresentata da un chiodo o da un punzone dipende quindi dalla sua posizione nel numero rappresentato. Si tratta di una proprietà tipica di un sistema di numerazione estremamente moderno, detto «posizionale», che permette di rappresentare numeri molto grandi o molto piccoli con un numero di simboli ridotto. Le due differenze principali rispetto al sistema che usiamo noi riguardano, da un lato, l'uso della base sessanta «mescolata» alla base dieci, e dall'altro l'assenza di simboli che rappresentino lo zero e la virgola. Quest'ultima caratteristica fa sì che la rappresentazione dei numeri possa essere fonte di equivoci: infatti i tre punzoni isolati della tavoletta YBC 7289 possono rappresentare altrettanto bene i valori 30, 1800 ($= 30 \times 60$), 108 000 ($= 30 \times 60^2$) ma anche 0,5 ($= 30/60$). In pratica, però, la cosa non è grave, poiché nella gran parte dei casi il contesto permette di fare una scelta coerente (nel capitolo 11, comunque, ritorneremo sull'opportunità di interpretare il lato del quadrato di YBC 7289 come uguale a 0,5 anziché a 30 come viene fatto abitualmente).
La notazione utilizzata di solito per trascrivere la numerazione sessagesimale babilonese consiste nello scrivere le «cifre» babilonesi (comprese tra 0 e 59) nel modo cui siamo abituati e nel separarle con delle virgole; per quanto riguarda la separazione tra le unità e i sessantesimi, invece, si utilizza un punto e virgola. Ad esempio, 28,34;11,02 rappresenta il numero $(28 \times 60) + 34 + (11/60) + (2/60^2)$, e l'espressione 1;24,51,10 che abbiamo riportato sulla traduzione di YBC 7289 corrisponde al numero $1 + (24/60) + (51/60^2 + (10/60^3)$.

Il passaggio dalla base sessanta dei Babilonesi alla base che utilizziamo oggi non consente, in generale, di conservare espressioni aventi solo un numero finito di cifre dopo la virgola (ne riparleremo nel capitolo 14), e dunque la traduzione in base dieci riportata nella didascalia della figura precedente non può che essere approssimativa. Sufficiente, però, per capire cosa interessasse all'autore della tavoletta: il numero 30 indica il lato del quadrato, e 42,4263889

la lunghezza della sua diagonale. Quanto al numero 1,41421296, si tratta del fattore moltiplicativo da applicare al lato per trovare la diagonale. In altri termini, 1,41421296 × 30 = 42,4263889.

Ecco qual è il senso che riusciamo ad attribuire alla tavoletta YBC 7289: se un quadrato dato ha lato uguale a 30, la lunghezza della sua diagonale si ottiene moltiplicando 30 per il valore 1,41421296.

A differenza della lunghezza del lato, indubbiamente scelta uguale a 30 con il semplice intento di fornire un esempio concreto, il valore 1,41421296 messo in evidenza dai Babilonesi ha una portata universale: è il valore da utilizzare per trovare la diagonale di *qualsiasi* quadrato, qualunque sia la lunghezza del suo lato. Nella tavoletta YBC 7289 il valore 1,41421296, che per noi equivale alla radice di 2, non compare come semplice grandezza geometrica legata al contesto di un esercizio, ma come costante fondamentale della geometria. E tale è, ancora oggi, il suo rango.

L'uomo che ha impresso con lo stilo i simboli visibili sulla tavoletta di argilla parlava una lingua che non aveva una parola per «matematica». Non era uno scienziato, né un ricercatore nel senso che diamo oggi a questo termine; piuttosto, senza dubbio, un calcolatore dotato di un catalogo di metodi per risolvere dei problemi. Per noi è anche uno dei rari testimoni di un'epoca che vide sbocciare un'entità dal destino favoloso. Circa quattromila anni fa, su una tavoletta di argilla, nasceva la radice quadrata di 2.

Una precisione impensabile

Sebbene si possano già trovare delle stime della radice di 2 su tavolette babilonesi più antiche, la YBC 7289 si distingue per la sua grande precisione (il che, beninteso, non esclude che qualche tavoletta oggi scomparsa possa averla preceduta). Sembra che in precedenza fosse di uso corrente l'approssimazione 1;25 (vale a dire circa 1,4167), che corrisponde a una precisione dell'ordine del millesimo: la precisione di YBC 7289, dal canto suo, è dell'ordine di una parte su un milione. Di tutti i numeri a tre ordini sessagesimali (ovvero «tre cifre dopo la virgola», dove le «cifre» si intendono in base sessanta), quello inciso su YBC 7289 è il più vicino alla radice di 2.

Tanto per fare un confronto, nello stesso periodo gli Egizi erano ben lontani da una simile precisione, almeno per quel che ne sappiamo noi. Il loro interesse per la radice di 2 sembra essere legato alla sua proprietà di fattore da applicare al lato di un quadrato (in pratica, un terreno, o un campo coltivato) per costruire un quadrato di area doppia (vedi cap. 9). Nel loro sistema di misure di lunghezza più diffuso, detto digitale poiché il «dito» (circa 2 cm) ne costituisce l'unità, un «palmo» misura quattro dita, un «cubito remen» ne misura venti, un «cubito reale» ventotto e un «doppio cubito remen» quaranta; il rapporto tra il cubito reale e il cubito remen, dunque, è di 28/20, una frazione che, semplificata, diventa 7/5; il rapporto tra il doppio cubito remen e il cubito reale è di 40/28, cioè 10/7. Nel 1892 l'egittologo Francis Griffith formulò l'ipotesi, discussa ancora oggi, che si trattasse di rapporti scelti per approssimare quella che chiamiamo radice quadrata di 2 (nel cap. 9 torneremo sulle possibili motivazioni che potrebbero aver spinto gli Egizi a una scelta del genere).

I rapporti 7/5 e 10/7, tuttavia, corrispondono a un'approssimazione di $\sqrt{2}$ alquanto modesta, dell'ordine di una parte su cento. È possibile che qualche documento che non ci è giunto riportasse altre stime? Comunque sia, la precisione raggiunta dai Babilonesi nel calcolo di $\sqrt{2}$ è tale che, duemila anni dopo, il grande astronomo greco Claudio Tolomeo si serve ancora del loro risultato per i suoi calcoli (non sappiamo come ne sia venuto a conoscenza). Per un numero come π, altra costante fondamentale della geometria, bisogna aspettare gli Arabi del Medioevo – cioè tremila anni più tardi – per averne un'approssimazione così precisa; gli stessi Babilonesi utilizzavano per π delle approssimazioni la cui precisione non superava una parte su dieci.

Passato lo stupore per un risultato così fuori dal comune, nascono numerosi interrogativi: perché i Babilonesi hanno voluto determinare la radice di 2 in modo così preciso? Le loro ragioni erano di ordine pratico? Ludico? O forse intellettuale? Come interpretavano il risultato? Erano consapevoli di aver trovato solamente un valore approssimativo di $\sqrt{2}$, o credevano di averne trovato il valore esatto? Che metodo hanno utilizzato per ottenere un risultato la cui precisione è stata forse superata per la prima volta più di duemilacinquecento anni dopo, ad opera dell'indiano Govindashwamin?

Per avere un'idea del possibile interesse dell'autore della tavoletta YBC 7289 per una tale precisione nella conoscenza di $\sqrt{2}$ si può provare a individuarne gli usi pratici. Nell'antichità, i più importanti riguardano probabilmente l'architettura (ne parleremo nel corso del cap. 9). Nella maggioranza dei casi immaginabili, però, una precisione dell'uno per mille è sufficiente: anche per la costruzione di un grandissimo edificio a base quadrata, come una ziggurat (l'equivalente mesopotamico delle piramidi egizie), l'errore sulla diagonale con l'approssimazione fornita da YBC 7289 è dell'ordine di un centimetro per una costruzione lunga diverse centinaia di metri! Una precisione simile non era giustificabile, tenendo conto di tutte le inevitabili imprecisioni dell'edilizia dell'epoca.

Se la nostra civiltà contemporanea ha un gran bisogno di calcoli di alta precisione, ben al di là di qualche cifra decimale (si veda la terza parte del libro), per i Babilonesi la cosa non aveva alcun interesse oggettivo. Ma allora perché si sono spinti fino a un'approssimazione simile?

Il gioco dell'esattezza

In assenza di una giustificazione di ordine pratico, si possono fare ipotesi di vario genere, che non si escludono a vicenda. Una di queste potrebbe essere che, nel valutare il rapporto tra la diagonale del quadrato e il suo lato, i Babilonesi avessero creduto inizialmente che il risultato sarebbe stato un valore esatto, il che avrebbe legittimato *a posteriori* gli sforzi fatti per ottenerlo.

È ragionevole sperare di poter scrivere il valore esatto della radice di 2 con un numero finito di cifre dopo la virgola? Per rispondere nel modo più semplice possibile, poniamoci nella base dieci che ci è familiare, e cerchiamo di capire che valore dovrebbe avere un eventuale numero decimale (cioè un numero dotato di una quantità finita di cifre dopo la virgola) che, moltiplicato per se stesso, dà 2. Nell'analisi del problema l'osservazione cruciale è che l'ultima cifra (ovvero quella «più a destra») del risultato della moltiplicazione dei due decimali è data dall'ultima cifra del prodotto delle loro ultime cifre. Ad esempio, nell'espressione $54{,}27 \times 3{,}6 = 195{,}372$ l'ultima cifra del risultato (2) è la stessa del risultato della molti-

plicazione di 7 per 6 ($7 \times 6 = 42$). Per convincersi del fatto che la regola vale per qualsiasi numero decimale basta effettuare la moltiplicazione secondo il metodo «in colonna», quello imparato a scuola, e osservare il modo con cui si ottiene l'ultima cifra del risultato.

Torniamo al nostro problema, e indichiamo con m l'ultima cifra di un eventuale numero decimale x corrispondente alla radice quadrata di 2. Moltiplicando m per se stesso si deve trovare un numero la cui ultima cifra è uno zero, altrimenti il prodotto di x per se stesso finirebbe, dopo la virgola, con una cifra diversa da zero, il che impedirebbe al tempo stesso di avere un prodotto pari a 2. Ora, una semplice verifica mostra che il quadrato di un numero intero m compreso tra 1 e 9 non finisce mai per 0. Da ciò la conclusione: qualunque sia il valore decimale x di partenza, moltiplicandolo per se stesso non si otterrà mai 2. In altri termini, la radice quadrata di 2 non è un numero decimale.

Il ragionamento precedente vale anche per la base sessanta dei Babilonesi, se si eccettua una piccola complicazione che vedremo nel capitolo 7, quando generalizzeremo il fenomeno a tutti i sistemi di numerazione. Da un punto di vista tecnico, quindi, essi avevano i mezzi per stabilire il carattere infinito dello sviluppo sessagesimale della radice di 2: va detto, però, che non ci è pervenuta alcuna testimonianza esplicita di quell'epoca che dimostri l'interesse dei Babilonesi per una questione del genere.

Un altro elemento che potrebbe spiegare la precisione di YBC 7289 potrebbe essere il gusto del gioco. La voglia di andare sempre un po' più in là nel calcolo di $\sqrt{2}$ avrebbe potuto essere spinta all'estremo dal fatto che, proprio come Atena nacque uscendo dalla testa di Zeus armata di tutto punto, elmo compreso, la radice di 2 sembra essere nata insieme agli strumenti più efficaci per il calcolo del suo valore (li studieremo nel cap. 14): basti sapere che i nostri computer utilizzano la stessa tecnica dei Babilonesi!

Non sarebbe di certo l'unico esempio di progresso in campo matematico motivato da uno svago intellettuale: dalla teoria dei grafi a quella della tassellatura di Penrose, i casi del genere sono numerosi, e non solo in società e popoli dotati di una tradizione matematica. Sembra che sia anche il caso dei Sioux, i quali, prima che dell'arrivo degli europei sul continente americano, avevano sviluppato senza una ragione pratica evidente un sistema che permette-

va di definire i numeri interi fino al milione. Pensiamo alla gara per calcolare i numeri decimali di π (vedi cap. 15), e al fascino che esercita su esperti e profani nonostante l'interesse pratico di tutte quelle cifre sia oggi assolutamente inesistente: solo così, forse (e solamente forse, beninteso), potremo farci un'idea di ciò che ha spinto i Babilonesi a trovare un'approssimazione di $\sqrt{2}$ così precisa.

Dalle parti dell'India

Passa qualche secolo da quando lo scriba babilonese affida alla tavoletta la stima del rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato, ed è in India che ci si occupa nuovamente del problema. Così come non sappiamo con esattezza quando i Babilonesi abbiano cominciato a dedicarsi all'argomento, anche la data di nascita esatta dell'interesse indiano per la radice di 2 è ignota: è possibile, tuttavia, che le prime ricerche risalgano all'VIII secolo a. C.

Una stima di $\sqrt{2}$ appare nel *Sulvasutras* del matematico indiano Apastamba (V o IV secolo a. C.), che nel sesto punto del primo capitolo dà le istruzioni seguenti: «Allungate l'unità di un terzo, poi questo terzo di un quarto di se stesso meno un trentaquattresimo di quest'ultima parte». Se ci serviamo della notazione moderna, possiamo scrivere:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3+4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Non si sa bene come abbia fatto Apastamba a ottenere questa espressione (di cui si serve poi per la costruzione approssimata di un quadrato). La sua precisione è leggermente inferiore a quella di YBC 7289, ma in compenso si tratta di una rappresentazione della radice di 2 che ha un senso matematico più profondo; il suo vantaggio principale è di non essere legata ad alcuna base di numerazione. Avremo occasione di vedere, in particolar modo nella quinta parte del libro, che la rappresentazione dei numeri nella base dieci che ci è familiare, in quella sessagesimale dei Babilonesi o addirittura nella base due dei computer, non è quella che meglio si adatta allo studio delle proprietà di un numero come $\sqrt{2}$. Per capirne le caratteristiche matematiche sono preferibili altre rappresenta-

zioni, tra cui quella di Apastamba che contiene in forma embrionale i rudimenti del concetto di «frazione continua ascendente» (vedi cap. 19). Nel corso della storia della matematica, si è dovuto aspettare molto perché si riconoscesse l'utilità di poter rappresentare i numeri in maniera alternativa ai sistemi di numerazione tradizionali.

L'infanzia di un numero

Fin dove si sono spinte le riflessioni sulla radice di 2 di questi primi pensatori? Indiani, Babilonesi: sembra che si siano accontentati tutti di fare dei calcoli di precisione. Ciò che sappiamo della matematica babilonese mostra un interesse per gli esempi concreti, e non per gli studi teorici. Nessuna delle numerose tavolette di quell'epoca presenta un contenuto che non abbia l'aspetto di un esercizio (in una forma simile a quella degli enunciati dei problemi che devono risolvere gli studenti dei nostri tempi), di una «ricetta» (come YBC 7289, che in fondo non è altro che l'enunciato di un «trucco» per calcolare la lunghezza della diagonale di un quadrato a partire dalla lunghezza del lato), oppure di un catalogo (tabelle di calcolo, liste di costanti geometriche di vario tipo; si noti che una di queste, la tavoletta Ue.YBC 7243, dà a $\sqrt{2}$ lo stesso valore presente sulla tavoletta YBC 7289).

Una cosa è certa: qualunque sia stato il metodo impiegato dai Babilonesi per estrarre la radice di 2, è lecito pensare che si siano resi conto dell'esistenza di uno scarto persistente tra 1;24,51,10 e $\sqrt{2}$; abbiamo visto come avrebbero potuto anche capire che il problema non si sarebbe risolto proseguendo nel calcolo. Non è detto, però, che la faccenda dovesse necessariamente turbare i loro sonni, dato che sapevano già che certe quantità sono restie a farsi esprimere in notazione sessagesimale: il numero 1/7, ad esempio, non ha un numero finito di cifre dopo la virgola (né in base decimale, né in base sessagesimale). Quando si deve esprimere un numero del genere, dunque, bisogna ricorrere a un'approssimazione. Di fronte al persistere del problema per la radice di 2, uno scriba babilonese avrebbe potuto cavarsela benissimo alzando le spalle e ribattendo: «E allora?» In Mesopotamia, uno o due millenni prima della nostra era, un atteggiamento del genere, ispirato al buon senso,

era indubbiamente considerato valido, poiché è probabile che l'idea di studiare la struttura matematica fondamentale di un numero non fosse ancora nata. I nostri occhi di uomini del XXI secolo faticano a immaginare che dei calcolatori così dotati come gli scribi babilonesi non abbiano cercato di scoprire quanto ci sarebbe voluto, con i mezzi a loro disposizione, per ottenere il valore esatto di $\sqrt{2}$ o per capire perché non era possibile arrivarci. Siamo talmente imbevuti dell'idea di esattezza che abbiamo difficoltà ad accettare che la distinzione tra l'esatto e l'approssimato possa non essere considerata di importanza capitale.

Quanto agli Indiani, sembra che questi abbiano attribuito al valore fornito da Apastamba un'importanza grandissima, a tal punto che potrebbe aver dato origine a uno dei sistemi di misura delle lunghezze in uso a quei tempi, un po' come nel caso degli Egizi con le approssimazioni 7/5 e 10/7 (si veda nelle pagine precedenti): nel sistema indiano, l'unità di misura si divide in 12 sottounità dette *dita*, che a loro volta si dividono in 34 sotto-sottounità dette *grani di sesamo*. Un segmento di lunghezza $\sqrt{2}$, dunque, misurerebbe un'unità più cinque dita meno un grano di sesamo. Secondo lo storico della matematica Thomas Heath, il fatto che gli Indiani abbiano elaborato un sistema di misura basandosi sulla stima approssimata di $\sqrt{2}$ dimostra che non erano consci del suo carattere di approssimazione.

È probabile, quindi, che a quei tempi gli scribi e i calcolatori fossero ancora ben lontani dall'immaginare una delle principali caratteristiche che fa della radice di 2 un oggetto matematico assolutamente particolare: il fatto che si tratti di un «numero irrazionale», cioè di un numero che non può essere ottenuto come risultato della divisione tra due interi. La distinzione tra numeri razionali (quelli che possono essere espressi come rapporto tra numeri interi, come 3/8, 18/7, ma anche 15 (= 15/1)) e irrazionali (ad esempio $\sqrt{2}$, come dimostreremo in più modi nel corso del libro) è tra le più importanti della teoria dei numeri, e forse di tutta la matematica; ci ritorneremo spesso. Si tratta, però, di una distinzione che non ritroviamo in tutte le epoche, né in tutte le civiltà, per quanto complessa possa essere stata la loro attività matematica. Sembra che in Cina, ad esempio, la nozione di numero irrazionale non abbia mai attirato l'attenzione dei primi matematici, che pure avevano ottenuto di-

versi risultati nel campo dell'aritmetica e di tutta quanta la matematica, interessandosi anche a concetti come quello di «grande anno» (il tempo che si deve aspettare perché il Sole, la Luna e i pianeti ritornino tutti alle loro posizioni iniziali), che conducono in maniera abbastanza naturale a un problema di irrazionalità. È vero che nel III secolo, commentando un grande classico della matematica cinese, l'*Arte matematica in nove capitoli*, di autore ed epoca incerti, Liu Hui parla dei «piccoli numeri senza nome» riferendosi alla parte frazionaria delle radici quadrate (0,414... per $\sqrt{2} = 1,414...$) ma senza dar vita ad alcuna considerazione sulla natura irrazionale dei numeri in questione. Delle popolazioni amerindie, il cui interesse per la geometria fu pressoché nullo, sembra che nessuna abbia mai cercato di stimare il valore di $\sqrt{2}$. A meno che i documenti sull'argomento non siano stati distrutti nel corso della conquista spagnola, nessun matematico maya, azteco o inca si è mai preoccupato di consegnare alla storia qualcosa di simile alla tavoletta YBC 7289.

È possibile che i Babilonesi si siano limitati a una semplice tecnica pratica di calcolo, ma è pur vero che ci hanno tramandato la nozione che il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è un numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2. Inoltre ne hanno stimato il valore con una precisione che fa della radice quadrata di 2 il numero irrazionale meglio conosciuto per tremila anni. Tutto ciò non descrive in maniera esauriente l'insieme delle conoscenze matematiche dell'epoca – tutt'altro – ma è abbastanza per farci apprezzare le dimensioni del nostro debito matematico nei loro confronti.

2.

E l'incommensurabilità fu

La radice quadrata di 2 poteva forse restare per sempre un semplice fattore moltiplicativo che permette di passare dalla lunghezza del lato di un quadrato a quella della sua diagonale? Retrospettivamente, ciò che sconvolse la sua esistenza tranquilla ha più le caratteristiche di un evento fortuito che della conseguenza inevitabile di un ipotetico irresistibile progresso della matematica. In effetti, per la radice di 2 tutto andava per il meglio nel regno dei numeri: non era stata forse elevata al rango di costante fondamentale della geometria grazie al suo legame con la diagonale del quadrato? Le tecniche di calcolo babilonesi non permettevano forse di valutarla con grande precisione? Certo, ci si sarebbe potuti chiedere perché era impossibile esprimere in maniera esatta $\sqrt{2}$ in base sessanta. «Sai che affare!» avrebbe potuto dire uno scriba babilonese mettendo in dubbio l'interesse della questione (un'osservazione che peraltro giunge spesso alle orecchie degli insegnanti dei nostri giorni).

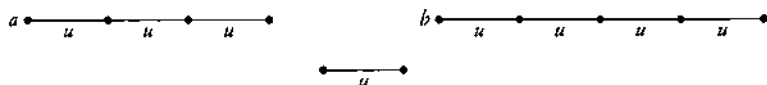
L'infanzia della radice di 2 era protetta da più di una muraglia matematica e intellettuale, ma lo sconvolgimento ci fu lo stesso, con la scoperta dell'esistenza delle «grandezze incommensurabili». Fu questa rivoluzione che mise fine una volta per tutte all'infanzia della radice di 2 e la trasformò in una bella adolescente.

La mistica dei numeri

L'origine esatta della scoperta del fenomeno dell'incommensurabilità è avvolta da una fitta nebbia. Sembra che sia stata opera

di una scuola fondata da Pitagora nel VI secolo a. C. e le cui idee hanno influenzato profondamente il pensiero antico. Più che di un gruppo di scienziati, si trattava di quella che oggi definiremmo una setta, decisamente orientata verso la mistica e i «numeri» (*arithmoi*), un termine il cui senso non è esclusivamente matematico: il «numero» dei pitagorici, oltre a essere un oggetto matematico, è anche un principio che organizza l'universo. L'incertezza a riguardo è grande, ma è possibile che gli interrogativi di natura mistica sul numero abbiano condotto i pitagorici alla scoperta del concetto di incommensurabilità.

Per i matematici greci dell'antichità, gli unici ad avere diritto al titolo di numero sono gli interi positivi, ad eccezione dello zero (inventato in India nel VII secolo d. C.) e... dell'uno, almeno per i primi pitagorici che consideravano l'unità non come un numero a tutti gli effetti, ma come ciò che genera i numeri. Dal canto loro, le quantità frazionarie, come 1/2 o 3/4, sono viste come rapporti tra numeri. L'assenza di concetti chiari e di una notazione simbolica appesantisce non poco gli enunciati: per esprimere un'uguaglianza semplice come 3/4 = 6/8, i Greci devono scrivere qualcosa del tipo «3 sta a 4 come 6 sta a 8». Invece di fare come noi, che consideriamo i rapporti 3/4 e 6/8 come due rappresentazioni intercambiabili di uno stesso oggetto (che noi chiamiamo numero), i matematici dell'antica Grecia considerano la sequenza 3,4,6 e 8 come un tutto, una «proporzione».

Non è necessario che i termini di una proporzione siano numeri: dati due segmenti *a* e *b*, dire che *a*, *b*, 3 e 4 formano una proporzione esprime il fatto che «*a* sta a *b* come 3 sta a 4» (ovvero, utilizzando il linguaggio corrente dei nostri tempi, che la lunghezza di *a* è tre quarti di quella di *b*). Un modo per rappresentare tale proprietà da un punto di vista geometrico consiste nel definire un terzo segmento, *u*, la cui lunghezza è pari a un terzo di quella di *a*: è facile, allora, vedere che *b* contiene esattamente quattro copie di *u*.

Quando si afferma che *u* «misura» *a* e *b* si intende che *u* costituisce un'unità di misura grazie alla quale la lunghezza dei seg-

menti a e b può essere espressa in maniera esatta attraverso dei numeri interi (rispettivamente 3 e 4). Attenzione: il linguaggio di tutti i giorni utilizza sovente il verbo «misurare» con un altro senso: «u misura a», per noi, non vorrà dire «u e a hanno *la stessa misura*» bensì «u è un'unità di misura per a», cioè che a corrisponde esattamente all'unione di più sotto-segmenti di lunghezza u (tre, nella figura precedente).

In quest'ottica, determinare il rapporto tra due lunghezze date equivale a cercare un'unità di misura comune a entrambe. Ad esempio, se i segmenti a e b della figura precedente sono ottenuti per via puramente geometrica, allora per determinare «di quanto b è maggiore di a» si cerca un segmento che li misuri entrambi: una volta che lo si è trovato e che si è stabilito che u è contenuto tre volte in a e quattro in b, si può affermare che a, b, 3 e 4 formano una proporzione. Se al posto del segmento u si utilizza come unità di misura un segmento v due volte più piccolo, questa nuova unità sarà contenuta sei volte in a e otto in b, stabilendo così che a, b, 6 e 8 formano anch'essi una proporzione. Nel nostro linguaggio moderno tutto ciò si traduce nell'uguaglianza tra frazioni: $3/4 = 6/8$.

Si dice che i pitagorici sostenessero che «tutto è numero». In parole povere, significa (tra le altre cose) che due grandezze possono sempre essere prese come i primi due termini di una proporzione, a patto che abbiano la stessa natura: numeri, segmenti, ma anche tempi o intervalli musicali (vedi cap. 4). È in questa direzione, dunque, che potrebbe essersi indirizzata una parte delle ricerche dei pitagorici: date due grandezze x e y, trovare un'unità che le misuri entrambe, così da ottenere due numeri (sempre interi positivi) m e n tali che x, y, m e n formino una proporzione. È possibile fare una cosa del genere qualunque sia la natura di x e y? In realtà no: il lato di un quadrato e la sua diagonale sono segmenti che non possono essere misurati contemporaneamente da un terzo segmento comune (nel corso del libro ne daremo varie dimostrazioni – si veda l'indice delle dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, a p. 407). È per questo che la diagonale e il lato del quadrato si dicono «incommensurabili». Sia l la lunghezza del lato, e d quella della diagonale: il fatto che non esistano degli interi m e n tali che l, d, m e n formino una proporzione si traduce, in termini

moderni, nel fatto che il rapporto *d/l* non può essere espresso come rapporto tra due numeri interi, *n/m*. La radice quadrata di 2, rapporto tra la diagonale e il lato, viene quindi definita «irrazionale».

La lunga marcia verso l'incommensurabilità

La nostra conoscenza della matematica e della sua storia ci permette di immaginare senza problemi che possano esistere delle grandezze incommensurabili, cioè dei numeri irrazionali. Ciò nonostante, ci riesce difficile sopravvalutare l'incredibile rivoluzione intellettuale rappresentata dalla scoperta di un tale fenomeno. Da un semplice punto vista matematico, il cammino che conduce a questa scoperta è interrotto da tre alte muraglie. Per superare la prima bisogna riconoscere il fatto che qualsiasi valore ottenuto da una misura diretta non può dare che una stima approssimata di $\sqrt{2}$. Per oltrepassare la seconda bisogna capire che, al di là degli inevitabili limiti di una misura diretta, nessuna espressione numerica consentirà *mai* di rappresentare la radice quadrata di 2, ovvero, per dirla con termini moderni, che non esiste una frazione che possa esprimerla, o anche che la diagonale del quadrato e il suo lato sono incommensurabili. Il terzo ostacolo, infine, è quello più difficile: si tratta di definire l'incommensurabilità attraverso argomenti puramente matematici.

A questi tre ordini di mura, identificati dallo storico della matematica Henri Vogt, si aggiunge un ostacolo di natura completamente diversa: l'assenza di un interesse reale a superarle. A cosa serve, in fondo, sapere che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili? L'importanza di questa domanda è pari a quella di sapere come o da chi è stata fatta la scoperta. Tra le motivazioni originali, l'appetito di sapere razionale che anima i matematici odierni può aver giocato solo in parte, e qualsiasi tentativo di ricostruzione non può prescindere da una certa prudenza. È possibile che i pitagorici fossero imbevuti dall'idea di un'armonia universale, di cui i numeri erano l'espressione, a tal punto da ritenere che tutti i segmenti dovessero essere reciprocamente commensurabili, in ossequio al loro credo «tutto è numero». Nel 1882, lo storico della scienza Paul Tannery ha proposto una ricostruzione degli even-

ti divenuta poi celebre: «I pitagorici sono partiti dall'idea, che qualsiasi uomo non istruito trovava naturale, che ogni lunghezza è necessariamente commensurabile all'unità. La scoperta dell'incommensurabilità reciproca di certe lunghezze, prime fra tutte la diagonale del quadrato e il suo lato, dovette rappresentare fin dal primo momento un vero scandalo logico, uno scoglio temibile, indipendentemente dal fatto che fosse opera del Maestro o dei suoi discepoli. Scoprire la verità è più facile che sradicare una convinzione errata, e comunque l'incommensurabilità era in contraddizione formale con i principi della teoria dei rapporti che erano stati stabiliti solo per i numeri [...] Se la scuola pitagorica ebbe mai dei misteri riservati ai soli iniziati, l'incommensurabilità dovette quindi farne parte».

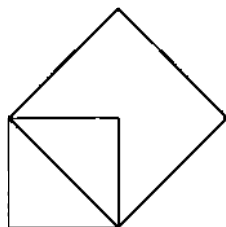
L'espressione «scandalo logico» ha avuto fortuna, così come l'idea di una crisi intellettuale scatenata dalla scoperta delle grandezze incommensurabili. Un'intera corrente della ricerca nell'ambito della storia della matematica ne ha tratto ispirazione, arrivando a sostenere che le visioni mistiche dei pitagorici sui numeri sono all'origine della scoperta dell'incommensurabilità e dell'interesse nei confronti di un concetto che sembra aver demolito una parte della loro dottrina.

Origini misteriose

Nel corso del XX secolo una visione così romanzesca della scoperta delle grandezze incommensurabili è stata decisamente ammorbidita, in primo luogo a causa della scarsità di fonti affidabili per quel periodo. I pitagorici praticavano il segreto; i resoconti più dettagliati su di loro parlano della scoperta dell'esistenza delle grandezze incommensurabili come di un evento che segnò la storia della scuola, fino a sostenere che il suo scopritore sarebbe morto colpito da una punizione divina per aver divulgato la cosa. È difficile, però, poter dare molto credito a questo genere di storie, che ci giungono essenzialmente da Giamblico, un autore che visse più di sette secoli dopo i fatti narrati e i cui scritti, parziali e contraddittori, sono tutto fuorché affidabili.

Sull'identità dell'autore della scoperta regna l'incertezza più assoluta, così come sull'epoca in cui visse (senza dubbio nel V secolo

a. C.); non si sa molto di più neanche su quali siano state le prime grandezze identificate come incommensurabili, né sul ragionamento utilizzato per la dimostrazione. La diagonale e il lato del quadrato, la cui rappresentazione geometrica è particolarmente semplice, sono tra i candidati più seri, ma non sono gli unici. Esistono infatti molti metodi elementari per scovare grandezze incommensurabili (vedi cap. 4); sapere quali siano state le prime, in assenza di testimonianze abbastanza precise e affidabili, diventa quindi una faccenda delicata.

Ciò nonostante, è da tanti anni che la questione stuzzica l'immaginazione dei matematici e degli storici. Sono state fatte molte ipotesi per ricostituire quella che dovrebbe essere la dimostrazione originale, ma nessuna si è dimostrata priva di punti deboli.

La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che viene considerata oggi come la più classica (e che sarà esaminata nel cap. 5) viene presentata spesso come quella che mette in evidenza nel modo più semplice possibile il fenomeno dell'incommensurabilità; in realtà ciò è vero se si considera $\sqrt{2}$ in un'ottica molto più moderna di quella che poteva essere verosimile per l'epoca in cui avvenne la scoperta. D'altro canto, come è già stato indicato più volte da autori come Árpád Szabó, tale dimostrazione, così come molte altre, può essere stata concepita solo da qualcuno che era già a conoscenza della sua conclusione, e che se ne è servito per dare a quest'ultima delle basi più solide. Anche se questa dimostrazione classica, o una delle sue numerose varianti e presentazioni equivalenti, può essere stata effettivamente la prima dimostrazione rigorosa, si può immaginare che sia stata preceduta da argomenti euristici abbastanza persuasivi da indurre qualche pensatore, già fermamente convinto del risultato finale, a mettersi all'opera per elaborare una dimostrazione vera e propria.

Sperare che, sulla base dei testi attualmente a nostra disposizione, si possa ricostruire quella che forse fu la dimostrazione originale è ormai vano, e sono proprio i numerosi tentativi di ricostruzione a dimostrarlo: come vedremo nel seguito del libro, ci sono troppi modi elementari differenti per dimostrare l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato (così come di altre grandezze) per poterne scegliere uno, tanto più che il poco che sappiamo sugli albori della matematica greca e sulla nascita della no-

zione di grandezze incommensurabili ci arriva da autori che avevano per la matematica un interesse marginale. Il che non significa che la ricerca delle «prime dimostrazioni» possibili sia priva di interesse: i risultati ottenuti in tal senso nel corso del XX secolo sono dei veri e propri gioielli della matematica. Il loro interesse matematico basta, da solo, a giustificare le ricerche che vi hanno condotto, indipendentemente dal loro valore storico.

I primi testi

Per trovare i primi accenni espliciti ai numeri irrazionali bisogna aspettare qualche decina di anni dopo la loro scoperta. Il primo autore cui si possa fare riferimento è più noto come filosofo: si tratta di Platone, che ritorna spesso sulla problematica delle grandezze incommensurabili e in particolare sul caso della diagonale del quadrato. In uno dei dialoghi platonici, il *Menone* (scritto intorno al 380 a. C.), Socrate si serve di una serie di domande per portare uno schiavo a prendere coscienza del fatto che la diagonale del quadrato è la sua duplicatrice, ovvero che, dato un quadrato, se ne ottiene uno di area doppia definendone uno il cui lato è uguale alla diagonale del primo (ci ritorneremo nel cap. 9).

La risoluzione del problema non presuppone la conoscenza del fatto che la diagonale e il lato sono incommensurabili, e Platone non fa riferimento alla questione: la dimostrazione di tale risultato avrebbe rappresentato senza dubbio una digressione troppo importante in un punto del dialogo in cui l'argomento è anzitutto filosofico. L'irrazionalità della radice di 2, dunque, ha mancato l'ap-

puntamento con il più antico testo greco di carattere matematico che sia giunto sino a noi. Il momento del dialogo in cui ci si avvicina di più è quello in Socrate, davanti all'imbarazzo del suo interlocutore nel dover trovare un modo per raddoppiare l'area del quadrato iniziale, gli si rivolge con queste parole: «se non vuoi fare calcoli, indicaci almeno da quale lato [si ottiene il quadrato doppio]» (84a). Bisogna esser generosi per vedere nel suggerimento un'allusione all'inesistenza di un rapporto tra numeri interi che formi una proporzione con il lato e con la diagonale; alcuni specialisti, come Szabó, ipotizzano che si tratti di un'allusione «riservata agli intenditori».

Il testo più antico in nostro possesso in cui si evoca la nozione di incommensurabilità è un altro dialogo di Platone, *La Repubblica*: vi si trova un breve accenno alle «linee incommensurabili» e poi, più in là, un'affermazione poco chiara che parla di «diagonali irrazionali». Il brano in questione, particolarmente contorto, lascia intravedere l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato.

Molto più esplicito è un altro dialogo di Platone, il *Teeteto*, scritto verso il 369 a. C. Nel dialogo il giovane Teeteto spiega a Socrate come il matematico Teodoro gli abbia dimostrato che (per dirla con il linguaggio matematico dei nostri giorni) le radici quadrate di 3, 5, 6, e così via fino a 17 sono irrazionali (a eccezione, naturalmente, di $\sqrt{9}$ e $\sqrt{16}$, uguali rispettivamente a 3 e 4). Il fatto che Teodoro si sia fermato a 17 ha prodotto fiumi di inchiostro, così come il fatto che Platone cominci la sua lista con la radice di 3 e non con quella di 2. Lungi dal riflettere una qualsiasi forma di ignoranza, l'omissione mostra invece che il caso di $\sqrt{2}$ doveva essere troppo noto perché valesse la pena evocarlo.

Dopo Platone, la lista degli autori che menzionano le grandezze incommensurabili prosegue con Aristotele. Il fatto che «la diagonale è incommensurabile al lato» costituisce uno degli esempi preferiti dallo Stagirita per illustrare tale o talaltro aspetto delle sue idee: in tutta la sua opera se ne serve almeno una trentina di volte, e si potrebbe pensare benissimo che si tratti di riferimenti espliciti a ciò che corrisponde alla radice quadrata di 2... se non che, come è stato fatto notare dallo storico David Fowler, Aristotele non indica mai che si tratta della diagonale di un *quadrato* e non di

un altro poligono. Ora, il filosofo potrebbe anche pensare a un pentagono: è un'ipotesi compatibile con le labili tracce di dimostrazione sparse nel testo. In tal caso la radice di 2 lascerebbe la scena a un altro numero irrazionale: il «numero aureo» (vedi capp. 23 e 24). Se Aristotele si mostra così poco chiaro è indubbiamente perché, semplicemente, ciò che lo interessa non è la matematica, ma la filosofia. Analogamente, l'obiettivo di Platone nel *Menone* è anzitutto quello di illustrare la maieutica socratica. A tale scopo avrebbe potuto utilizzare qualsiasi altro argomento, e gli studiosi di storia della matematica possono già ritenersi fortunati per il fatto che Platone e Aristotele si servano così spesso di esempi provenienti dalla geometria. Una cosa è certa: in un certo senso, nell'opera di Aristotele la dimostrazione di un fenomeno geometrico così notevole come l'incommensurabilità della diagonale e del lato di un quadrato ha mancato più di un appuntamento.

Gli appuntamenti mancati della diagonale

È con Euclide, qualche decina di anni dopo Aristotele, che incontriamo la prima dimostrazione esplicita dell'esistenza di grandezze incommensurabili tra loro. Il libro X degli *Elementi* ne presenta un elenco intero, dimostrando – per dirla in termini matematici moderni – l'irrazionalità di vari tipi di numeri che hanno in comune la caratteristica di poter essere espressi solo attraverso l'uso di radici quadrate: ad esempio, $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, oppure $\sqrt{(2+\sqrt{3})}$, $\sqrt{(\sqrt{7}-\sqrt{3})}$, e altri ancora dello stesso genere. (Senza addentrarci in spiegazioni che ci porterebbero troppo lontano, diciamo solo che Euclide si limita esclusivamente alle radici quadrate perché considera solo quelle lunghezze che possono essere costruite servendosi di riga e compasso; nel 1837 Pierre Laurent Wantzel ha dimostrato che l'insieme delle lunghezze di questo tipo corrisponde esattamente a quello dei numeri che, come negli esempi appena citati, possono essere espressi mediante radici quadrate.)

La proposizione 9 del libro X degli *Elementi* stabilisce per via geometrica, così come erano soliti fare i Greci, l'irrazionalità dei numeri di tipo $\sqrt{n}$ per ogni intero n che non sia un quadrato perfetto. Si può indubbiamente applicare la proposizione anche al caso

particolare di $\sqrt{2}$, ma Euclide sembra disinteressarsene completamente, poiché ciò che gli preme è costituire una classificazione dei vari tipi di linee incommensurabili tra loro. È vero che in alcune edizioni degli *Elementi* si trova l'enunciato per cui «nel quadrato, la diagonale è incommensurabile, per lunghezza, al lato», seguito da una dimostrazione (analoga a quella che troverete nell'appendice di questa prima parte del libro) o addirittura, a volte, da due. Si tratta della proposizione 117 (nonché ultima) del libro X: il suo spirito è talmente lontano da quello generale dell'opera che oggi si tende a considerarla come un'aggiunta molto più tarda.

Pur non essendoci ombra di dubbio sul fatto che l'incommensurabilità tra la diagonale del quadrato e il suo lato sia stata scoperta e dimostrata non più tardi del IV secolo a. C. (più probabilmente nel corso del V secolo), il documento più antico in nostro possesso in cui se ne trovi una dimostrazione esplicita è un testo di Alessandro di Afrodisia risalente al III secolo d. C. Nel suo commento agli *Analitici primi*, Alessandro analizza proprio uno di quei passaggi dell'opera in cui Aristotele evoca «la diagonale e il lato», e fornisce una dimostrazione completa a partire da un quadrato. La dimostrazione della proposizione apocrifa 117 del libro X degli *Elementi* assomiglia a quella di Alessandro, che potrebbe averla ispirata (nell'appendice al termine di questa parte il lettore ne troverà una versione accompagnata da alcuni chiarimenti).

Questo ritardo nella formulazione esplicita di un fenomeno che i Greci consideravano tuttavia importantissimo è, forse, solo apparente: sono molti i testi dell'antichità greca che non ci sono giunti, ed è possibile che alcuni di questi abbiano anticipato la dimostrazione di Alessandro (nel qual caso, però, diventa ancora più difficile capire perché quest'ultimo si sia preso la briga di fare la sua dimostrazione, che, come potrà giudicare il lettore, è quantomeno tortuosa). D'altro canto, la conoscenza dell'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato deve essersi diffusa senza dubbio con grande velocità tra tutti quelli che avevano un minimo di interesse per la matematica, ed è quindi possibile, semplicemente, che nessuno abbia ritenuto che valesse la pena mettere per scritto qualcosa che faceva parte delle conoscenze comuni. Spesso è difficile ricostruire gli elementi della vita quotidiana di

un'epoca perché chi vi ha vissuto li ha dati per scontati e ha preferito menzionare le cose meno comuni, come dimostra in maniera eclatante l'assenza della radice di 2 nel *Teeteto* di Platone.

Più di duemila anni ci separano dagli antichi Greci, ma la teoria delle proporzioni conserva ancora un certo fascino desueto. È curioso come il formalismo della teoria delle proporzioni abbia resistito così a lungo nei testi didattici, sebbene l'approccio moderno alla nozione di rapporto sia al tempo stesso più semplice e più efficace. Un aneddoto: chi scrive può vantarsi di essere stato senza dubbio uno degli ultimi al mondo ad aver insegnato i rudimenti di tale teoria in un ambito istituzionale; successe nel 1999, nel quadro della preparazione a un concorso di promozione interno dell'esercito professionale, concorso il cui programma di matematica non era stato aggiornato dai tempi di Matusalemme (la maggior parte di quel programma, va detto, non sarebbe mai stata di alcuna utilità ai futuri ufficiali).

Tornando alle cose serie, il fatto che oggi la teoria delle proporzioni sia superata non deve far dimenticare che si tratta di una costruzione intellettuale tra le più brillanti, capace di lasciare il segno sulla matematica e, più in generale, sull'insieme del pensiero scientifico. Anche se con ogni probabilità non conosceremo mai i dettagli storici, quel che è sicuro è che l'incommensurabilità prese forma nel linguaggio di quella teoria, e di nessun'altra.

3.

L'avvento di un numero

La diagonale e il lato del quadrato sono incommensurabili, la radice quadrata di 2 è un numero irrazionale: due enunciati separati da un abisso, anche se equivalenti da un punto di vista matematico. Sono stati gli Arabi, nel Medioevo, a gettare un ponte tra i due. Così facendo hanno anche permesso di considerare la radice di 2 in termini nuovi, ancora attuali nonostante tutti gli sconvolgimenti che la matematica ha conosciuto da allora fino a oggi.

Una crisi di identità

Nel IV secolo, il greco Pappo di Alessandria lo afferma senza mezzi termini: «Per i numeri non può esistere né incommensurabilità né irrazionalità. I numeri sono razionali e commensurabili». È un'affermazione che la dice lunga sullo stato d'animo dei matematici del tempo, prigionieri dell'assenza di nessi abbastanza forti tra i loro due principali punti di vista sugli oggetti matematici: da una parte la geometria euclidea e dall'altra l'aritmetica, che si interessa alle proprietà dei numeri interi: divisibilità, «terne pitagoriche» (si veda l'appendice della terza parte), ecc.

L'aritmetica per i numeri interi, la geometria per le grandezze incommensurabili... in questo panorama non c'è spazio per i «numeri irrazionali». Appena uscita dalla propria infanzia, la radice di 2 attraversa quindi una crisi di identità: quella che per i Babilonesi era una *costante* (la radice quadrata di 2) si è trasformata in un *fenomeno*, che può assumere aspetti diversi, come quello dell'incom-

mensurabilità della diagonale e del lato o quello dell'impossibilità di «esprimere in numeri» la lunghezza del lato di un quadrato di area 2.

Con l'avvento della matematica araba le carte si ridistribuiscono. Verso l'anno Mille, il matematico Al-Karaji, dopo aver richiamato le definizioni di Euclide, risponde così a Pappo: «Io mostro come queste quantità [incommensurabili] sono trasposte in numeri». Il terreno, quindi, è di nuovo fertile: la radice di 2 può riconquistare il proprio rango di numero.

Al di là della geometria

Un quadrato che ha la propria area nella diagonale,
[la sua misura ha sfinito i primi saggi
Sui suoi due lati l'equivalente di due radici della sua diagonale,
[al momento della misura, come spiegarlo?

Questa breve poesia è stata scoperta (e tradotta dall'arabo) da Ahmed Djebbar in un manoscritto intitolato *Monito alle persone intelligenti sulle questioni di calcolo*. L'autore del manoscritto è il matematico maghrebino Al-Marzakushi, vissuto a cavallo tra il XIII e il XIV secolo; non è escluso, però, che si sia limitato a ricopiare il poema.

Il problema proposto si inserisce nella lunga tradizione araba dei giochi matematici. Si tratta di trovare la lunghezza l del lato di un quadrato di cui la lunghezza della diagonale, d, è pari all'area del quadrato, cioè $d = l^2$. Il primo emistichio del secondo verso, che si traduce nella relazione $2l = 2\sqrt{d}$, è matematicamente ridondante rispetto all'inizio della poesia, ma permette di rispettare la metrica della composizione araba. La soluzione dell'enigma non è difficile. Dato che in ogni quadrato il rapporto d/l vale $\sqrt{2}$, partendo dalla relazione $d = l^2$ si dimostra rapidamente che il lato vale $\sqrt{2}$ e la diagonale 2. La risposta può spiegare *a posteriori* che la poesia indica che ciò che ha «sfinito i primi saggi» è stata la misura del lato del quadrato, e non quella della diagonale. Forse l'autore pensava allo «scandalo logico» che scosse la scuola pitagorica, secondo quanto affermerà Tannery nell'Ottocento? Comunque sia, questo semplicissimo svago matematico mostra quanto cammino sia

stato fatto a partire dagli antichi Greci. Questi ultimi ritenevano inconcepibile che si parlasse di un'area (quella del quadrato) uguale a una lunghezza (quella della diagonale), poiché le due grandezze non hanno la stessa natura. All'epoca di Al-Marrakushi, invece, esisteva già da molto tempo l'abitudine di ricondurre la geometria ai numeri, liberando così l'attività matematica dalla pesantezza dei vincoli imposti dagli *Elementi* euclidei.

Pur integrandosi nel filone della matematica greca, gli Arabi ne rinnovano profondamente la prospettiva. Per i Greci, un'operazione come 3×4 va vista come il calcolo dell'area di un rettangolo di lati 3 e 4. Se ancora oggi l'espressione 3^2 viene detta «3 al quadrato» è perché un tempo si considerava l'operazione come geometrica: si costruisce un quadrato, *si quadra* un segmento di lunghezza 3, per ottenere un quadrato la cui area è uguale a 9, il «quadrato» di 3. I matematici arabi, invece, considerano 3×4 o 3^2 come entità matematiche indipendenti, slegate dal loro corrispondente geometrico, e inoltre mettono in evidenza un fatto fondamentale: le proprietà classiche sulle operazioni valgono sia per quantità *note* che per quantità *ignote*, o *indeterminate*. Nasce così una nuova disciplina: l'algebra, una parola che deriva dall'arabo *al-jabr*, associata in origine a uno dei modi di semplificare una formula.

Legata in particolar modo all'opera di Al-Khwarizmi, attivo nel IX secolo, l'algebra ha permesso di dare al concetto di operazione (addizione, moltiplicazione) una portata immensa, e di elaborare un formalismo di cui oggi non possiamo fare a meno. Così, invece di dire, come fa Euclide, che «se una linea retta è tagliata a piacere, il suo quadrato è uguale ai due quadrati delle due parti più due volte il rettangolo costruito su tali parti» (*Elementi*, libro II, proposizione 4) diventa possibile scrivere: «per qualsiasi x e y, si ha $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$». E quello che avrebbe potuto essere semplicemente un modo più comodo di scrivere un'identità algebrica ha dato vita a una nuova entità matematica: il concetto di *equazione*, senza il quale, oggi, nella matematica si farebbe ben poco.

Gli Arabi, dunque, aprono la via a una definizione della radice di 2 che ancora oggi resta la più attuale: $\sqrt{2}$ è la soluzione (positiva) dell'equazione $x^2 = 2$. Pur mantenendo il suo status geometrico, la radice quadrata di 2 torna a essere quello che in seguito non ha mai più smesso di essere: un numero la cui esistenza non dipen-

de da altre entità. Restava comunque un problema: capire una volta per tutte il concetto stesso di numero.

La notazione $\sqrt{\ }$ per indicare una radice quadrata è stata utilizzata per la prima volta dal tedesco Christoph Rudolff, in un trattato del 1525. È possibile che si tratti di una deformazione della lettera *r* (dal latino *radix*, «radice»). Oggi, indubbiamente per ragioni di prossimità grafica, il segno che rappresenta la radice quadrata viene associato più facilmente alla lettera V, come è dimostrato da una sequenza di tasti di uso comune nei software di word processing per scrivere il segno $\sqrt{\ }$, Alt + Shift + V.

Nel corso dei secoli sono state utilizzate diverse notazioni, dal geroglifico egiziano che significa «angolo» (e rappresentato da un angolo retto) a R^2, usata da Nicolas Chuquet alla fine del XV secolo: alla fine del XVI secolo, le notazioni che coabitano nei vari trattati matematici sono almeno venticinque. Quanto alla linea orizzontale che sovrasta l'espressione di cui si vuole calcolare la radice, quel «braccio indicatore» che, disegnato da un professore di matematica uscito dall'immaginazione di Jules Verne, «minacciava di sottomettere il mondo intero alle sue equazioni furibonde», è ciò che resta di un vecchio modo di raggruppare i termini, poi rimpiazzato dalle parentesi: $\sqrt{a+b}$ equivale dunque a $\sqrt{(a+b)}$.
Sul piano concettuale non si tratta della notazione più riuscita, sebbene sia utilizzata spesso come emblema delle formule matematiche. In effetti è meno arbitrario indicare la radice quadrata di 2 sfruttando una regola dell'elevazione a potenza per cui, data una coppia di esponenti *a* e *b* qualsiasi, per qualsiasi numero *x* positivo si ha $(x^a)^b = x^{ab}$. Prendiamo $x = 2$, $a = 1/2$ e $b = 2$: applicando la regola di cui sopra si ottiene $(2^{1/2})^2 = 2^{(1/2)\times 2} = 2^1 = 2$, cioè il quadrato dell'espressione $2^{1/2}$ è uguale a 2, e dunque $2^{1/2}$ è uguale alla radice quadrata di 2. Se la sostanza di questa regola di esponenziazione risale ad Al-Mahani, matematico del IX secolo, è solo nel 1671, nel trattato sulle «flussioni» (una sorta di precursore dell'analisi matematica – si veda oltre), che Newton propone la notazione $x^{1/2}$ per indicare la radice quadrata di un numero *x*, «per analogia con le progressioni geometriche come x^3, $x^{5/2}$, x^2, $x^{3/2}$, x, $x^{1/2}$, x^0 (cioè 1), $x^{-1/2}$, x^{-1}, $x^{-3/2}$, x^{-2} ecc.» (dove ogni termine si ottiene dividendo il precedente per $x^{1/2}$ – vedi cap. 13).

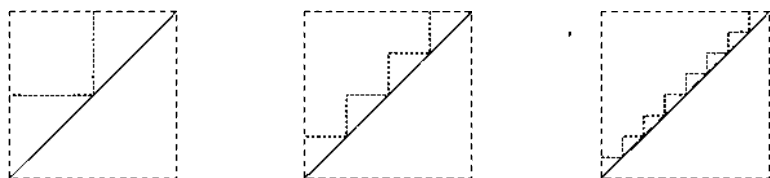
Pragmatismo numerico

Quello che ha di speciale la radice di 2 è che la si può considerare come un numero irrazionale, e quindi difficile da immaginare, o come una grandezza geometrica (la diagonale del quadrato) che è, da parte sua, molto semplice. Questo conflitto tra semplice e complesso ha occupato a lungo i dibattiti tra i matematici e tra i pensatori. Al tedesco Michael Stifel, che nel 1544 scrive nel suo *Arithmetica Integra* che «un numero irrazionale non è un vero numero, nascosto com'è in una sorta di nube di infinitezza», risponde nel 1585 il fiammingo Simone Stevino con il suo *Trattato delle grandezze incommensurabili*, in cui si afferma che «non esistono numeri assurdi, irrazionali, irregolari, inesplicabili o indefiniti», cioè che tutti i numeri, razionali o no, hanno ugual diritto di esistere. Stevino prende anzitutto come esempio $\sqrt{8}$ (cioè $2\sqrt{2}$), per poi citare «il lato e la diagonale di un quadrato, che sono linee tra di loro (per l'ultima proposizione del libro X di Euclide) incommensurabili, eppure né la diagonale, né il lato [...] sono linee assurde» (Stevino si riferisce alla proposizione 117 del libro X degli *Elementi*, che, come abbiamo visto nel capitolo precedente, è stata aggiunta all'opera di Euclide in un'epoca successiva). La sua argomentazione si conclude con l'affermazione che i numeri irrazionali non sono più difficili da concepire di quelli razionali: «[L'avversario] mi chiede di spiegargli cosa sia $\sqrt{8}$. Io gli rispondo: che mi spieghi che cos'è 3/4 [...] e io glielo spiegherò».

Stevino mette l'accento sulla definizione della radice quadrata come numero piuttosto che come rapporto di grandezze geometriche. Per lui, ormai, la radice di 2 non è altro che un numero, a tal punto da subordinare il punto geometrico a quello numerico quando spiega, sempre nel suo *Trattato*, che «[il fatto che] il lato del quadrato è incommensurabile alla sua diagonale [...] sarebbe impossibile da sapere senza i numeri».

Dagli Arabi del Medioevo, che demandano alla filosofia il compito di decidere se i numeri irrazionali esistono o meno, agli europei che in seguito rinnovano la matematica, tutti finiscono rapidamente per adottare senza tanti scrupoli un punto di vista pragmatico: è vero, i numeri irrazionali pongono dei problemi logici, ma fanno

troppo comodo per privarsene. È un atteggiamento che Bernard Fontenelle sintetizza efficacemente nel 1727 quando spiega che «i primi geometri avevano fatto pochissima strada quando si resero conto che il lato di un quadrato e la sua diagonale erano incommensurabili [...] Nacquero di lì i numeri incommensurabili, o irrazionali, che vennero scoperti in quantità incomparabilmente maggiore dei numeri razionali e irrazionali, ed essendo chiaro che la loro natura era particolare, ma assolutamente sconosciuta, gli antichi li evitavano con grande cura nella risoluzione dei problemi, e ne rifiutavano l'esistenza. Oggi, invece, li si accetta senza difficoltà, e le soluzioni che forniscono sono perfettamente legittime. Non è che li si conosca meglio, ma, a forza di incontrarli, sono diventati più familiari, hanno vinto grazie alla loro gran quantità e per la loro ostinazione a mostrarsi quasi ovunque.»

Le preoccupazioni dell'analisi

Nell'Ottocento le cose cambiano. Tutti quei numeri maneggiati senza preoccuparsi del modo in cui sono definiti fanno nascere dei sospetti, finendo per dar vita a un grande movimento di rifondazione del concetto stesso di numero. Il capovolgimento non nasce dal nulla, tutt'altro: la sua origine si colloca direttamente negli interrogativi formulati in quel periodo da una branca della matematica nota come «analisi».

Nata nel XVII secolo, l'analisi matematica si occupa del concetto di «passaggio al limite». Ne troviamo un esempio nella nozione di velocità: se per percorrere la distanza l ci si mette un tempo t, la velocità v è pari a l/t. Si tratta però dell'espressione di una velocità media, che non descrive eventuali variazioni nel corso del tragitto. La questione che si pone, quindi, è la seguente: come definire *per un istante dato* la velocità alla quale si viaggia? Ecco comparire il concetto di «velocità istantanea», che ha un po' il gusto di una contraddizione in termini, poiché, a un istante ben preciso, ci si trova in un punto ben preciso: la formula $v = l/t$, che porterebbe a dividere 0 per 0, così com'è, è inapplicabile.

La soluzione che ci arriva dall'analisi consiste nel considerare un piccolissimo intervallo di tempo intorno all'istante che ci interes-

sa; in questo intervallo anche la distanza percorsa è molto piccola: il rapporto delle due quantità ci dà un'idea della velocità istantanea, tanto più precisa quanto più è piccolo l'intervallo di tempo (e dunque anche la distanza percorsa). «Tendere al limite» equivale a determinare il «valore ultimo» della velocità media quando l'intervallo temporale diventa infinitamente piccolo. Tutta l'analisi classica si basa su calcoli di questo genere.

I problemi affrontati nel XVII e nel XVIII secolo non obbligano ad andare al di là dell'idea intuitiva di passaggio al limite. Nel XIX, però, le cose si complicano. La ricerca avanza su più fronti, e mette in luce paradossi e stranezze. Ad esempio, consideriamo un quadrato di lato unitario (e la cui diagonale, dunque, vale $\sqrt{2}$). Approssimiamo la diagonale con una scala che va da un vertice del quadrato a quello opposto.

Man mano che gli scalini si fanno più piccoli, la scala si avvicina sempre di più alla diagonale; potrebbe sembrare, quindi, che la sua lunghezza si avvicini sempre di più a $\sqrt{2}$. Invece si dimostra facilmente che, per quanto possano essere piccoli gli scalini, la lunghezza della linea spezzata è sempre e comunque uguale a 2. In effetti, proviamo a mettere in fila, uno dopo l'altro, i pezzi orizzontali che la costituiscono: dato che l'estremità sinistra di ognuno di essi è allineata verticalmente con l'estremità destra del precedente, unendo tutti i tratti si ottiene un segmento lungo come il lato del quadrato, cioè 1. Lo stesso ragionamento può essere applicato ai segmenti verticali, con lo stesso risultato. Ogni scala, dunque, è lunga $1 + 1 = 2$. Ora, più sono piccoli i gradini, più la scala tende a confondersi con la diagonale del quadrato. Quindi anche le rispettive lunghezze dovrebbero essere sempre più vicine; e dato che la diagonale del quadrato è lunga $\sqrt{2}$ mentre una qualsiasi delle nostre scale è lunga 2, si ha «pertanto» $2 = \sqrt{2}$...

Dove si nasconde l'errore? Lavorandoci un po' si può dimostrare che la diagonale è davvero la curva «limite» delle nostre scale (ogni punto di tale curva limite dalla diagonale è a distanza nulla da quest'ultima, e dunque giace su di essa). L'errore è altrove, e consiste nel credere che la lunghezza del limite sia uguale al limite delle lunghezze: un'idea allettante, che però non è sempre vera, e il ragionamento precedente mostra che è falsa (e non che $2 = \sqrt{2}$: possiamo tirare un sospiro di sollievo!)

Che cos'è un numero?

Di fronte alle conclusioni infondate cui si può venire condotti da passaggi al limite ingiustificati, i matematici devono reagire. Il rimedio si fonda su un esame sistematico dei fondamenti logici di un modo di ragionare che porta l'attitudine pragmatica a risultati disastrosi.

La rifondazione dell'analisi impone, tra le altre cose, una ridefinizione del concetto stesso di numero. I primi tentativi in tal senso consistono nel «creare» i numeri a partire quelli razionali (che non presentano alcun problema). Ad esempio, nel 1869 Charles Méray definisce un numero come $\sqrt{2}$ come il limite comune «ideale», «fittizio», delle successioni di numeri razionali il cui quadrato si avvicina sempre di più a 2 (un esempio di una successione del genere è costituito da 1 – 1,4 – 1,41 – 1,414 ...). Questo tipo di procedimento è stato così criticato da Bertrand Russell: «Il metodo che consiste nel creare ciò di cui si ha bisogno presenta molti vantaggi. Sono gli stessi vantaggi del furto rispetto al lavoro onesto». Russell punta il dito sul problema della «esistenza del definito»: non basta definire un oggetto per essere sicuri che esista davvero.

Ansioso di «lavorare onestamente», Russell perfeziona quindi una tesi formulata da Richard Dedekind, giungendo all'idea che un oggetto come la radice di 2 può essere concepito come un *insieme di numeri razionali*; più precisamente, l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è inferiore a 2 (Georg Cantor propone una definizione analoga, anche se con qualche differenza). Dedekind spiega che la sua costruzione permette di dimostrare per la prima volta in maniera rigorosa un'uguaglianza come $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$; in manie-

ra più generale, la visione insiemistica dei numeri irrazionali associa ai numeri una costruzione assolutamente coerente e rigorosa. Per quanto ineccepibile sul piano logico, però, una costruzione del genere ha scatenato delle obiezioni, legate all'idea che ci si fa di ciò che è definito. Certo, le definizioni di Cantor e di Russell evitano qualsiasi «creazione» poco tempestiva (autorizzandosi esclusivamente a costituire un insieme riunendo vari oggetti). Il prezzo da pagare, però, è caro: definire la radice quadrata di 2 come «l'insieme delle successioni di numeri razionali tale che la successione dei quadrati dei suoi termini è inferiore a $\sqrt{2}$» ci allontana tantissimo dall'idea che ci si fa di $\sqrt{2}$, rendendone quantomeno complessa la percezione.

L'atomo sotto accusa

Nel dibattito sulla natura dei numeri irrazionali, nel quale non ci addentreremo ulteriormente, la radice quadrata di 2 è servita spesso da esempio di riferimento, soprattutto a causa delle sue numerose filiazioni (numerica, geometrica, insiemistica). E ben prima delle discussioni tra i logici del XIX secolo, si era fatto frequentemente ricorso alla radice di 2 e alla diagonale del quadrato in un'altra controversia, il cui argomento può sembrare assolutamente distante dalla logica matematica e dalla teoria dei numeri: la struttura fondamentale della materia.

Molto sinteticamente, possiamo dire che fin dalle prime riflessioni teoriche dei Greci sulla natura, a opera di personaggi come Talete, Eraclito, Parmenide e Zenone nel corso del VI e del V secolo a. C., il tentativo di spiegare la composizione della materia ha portato allo scontro tra due teorie differenti. Una di queste è la «teoria atomica», che ha tra i suoi primi rappresentanti di spicco Democrito e Leucippo, vissuti nel corso del V secolo a. C. Secondo la teoria atomica la materia è formata da componenti elementari inscindibili (la parola «atomo», infatti, significa proprio «cosa indivisibile» in greco). Prima di trionfare, nel XIX secolo, ad opera del britannico Joseph Dalton – che riprese il termine «atomo» in omaggio a Democrito – la teoria atomica veniva considerata dagli studiosi della natura come qualcosa di assolutamente marginale.

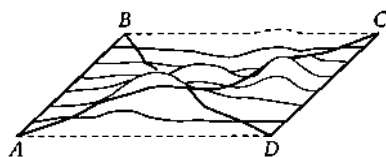
Quasi tutti seguivano Aristotele, il quale, nel IV secolo a. C. – un secolo dopo Empedocle – si era dichiarato dell'idea che la materia fosse formata da «quattro elementi» (aria, terra, acqua e fuoco) divisibili all'infinito.

Neanche con l'avvento della fisica sperimentale, nel corso del XVII secolo, la teoria atomica trova molti sostenitori; bisogna aspettare l'Ottocento, per una serie di ragioni. Una di queste viene esposta da Proclo già nel V secolo. Questi, conosciuto soprattutto per i suoi commenti sull'opera di Platone e di Euclide, se la prende con la teoria atomica difesa da Epicuro, e con l'idea, attribuita a Senocrate, di «fare di una linea indivisibile la misura di tutte le linee» invocando l'incommensurabilità della diagonale del quadrato e del suo lato. Argomentazioni analoghe vengono sviluppate nel corso del XIII e del XIV secolo, quando ritroviamo l'incommensurabilità tra la diagonale e il lato del quadrato nelle domande che diversi teologi si pongono sulla natura del continuo: una linea è sempre divisibile, oppure è formata da «grani» così come sostengono gli atomisti? Alla fine del XIII secolo lo scozzese Giovanni Duns Scoto spiega nella sua opera *Ordinatio* come sia impossibile ridurre una linea a una successione di punti. «Tutto il libro X di Euclide distrugge la composizione delle linee a partire da punti», spiega Scoto, e l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato vi contribuisce in modo particolare: se le linee sono fatte di punti a uguale distanza gli uni dagli altri, il rapporto tra il numero dei punti sulla diagonale e il numero di punti sul lato sarebbe una quantità razionale, mentre $\sqrt{2}$ è irrazionale. Qualche anno dopo, con il suo *Tractatus de continuo*, Thomas Bradwardine rincara la dose, spiegando come sia l'aritmetica che la geometria permettano di stabilire l'esistenza di grandezze incommensurabili, cancellando così ogni dubbio a riguardo, «e il fatto che la diagonale di un quadrato non sia commensurabile al suo lato è abbastanza noto a tutti».

Nella risposta di un atomista come Nicola di Autrécourt si rispecchia la debolezza di cui soffre la teoria atomica in quegli anni: dopo aver affermato apertamente di conoscere un «reverendo maestro» (di cui però non svela l'identità) che potrebbe dimostrare che la diagonale del quadrato è *commensurabile* al suo lato con «argomenti migliori» di quelli utilizzati da Euclide per dimostrare il contrario, egli propone un continuo di indivisibili il cui numero su qual-

siasi segmento è infinito. Non potendo giustificare un'idea del genere con un argomento matematico (cosa che forse avrebbe potuto fare servendosi dell'insieme dei numeri razionali, visto come un insieme di «indivisibili» infinito su qualsiasi intervallo), si limita a invocare un'astrazione di ordine teologico. Non c'è da stupirsi, dunque, se a quei tempi la teoria atomica era considerata con una certa sufficienza.

Anche se oggi non abbiamo più il minimo dubbio sulla validità della teoria atomica, è lecito chiedersi come difenderla da un'obiezione così pesante come l'incommensurabilità tra la diagonale del quadrato e il suo lato. Per semplificare le cose, rappresentiamo gli atomi come delle palline identiche e inscindibili. Tracciare una linea retta equivale quindi a costruire una catena di atomi messi in fila uno dopo l'altro. Facciamo materializzare una collana di atomi a forma di quadrato: l'incommensurabilità della diagonale e del lato impedisce che si materializzi un'altra catena di atomi come diagonale (d'altronde, prima ancora di ricorrere all'incommensurabilità, ci si scontra con un altro problema: gli angoli del quadrato sono troppo chiusi per consentire di trovare lo spazio necessario all'inserimento di un atomo). È una situazione seccante, non c'è dubbio: non è mai successo che un geometra si sia trovato nell'impossibilità di tracciare una lunghezza qualsiasi!

Tutto ciò basta per inficiare la teoria atomica? No: non solo gli atomi sono troppo piccoli perché i nostri occhi possano vedere se la loro posizione è conforme o meno all'esattezza geometrica, ma, su un piano più fondamentale, bisogna distinguere tra *spazio* e *materia*. L'incommensurabilità della diagonale del quadrato rispetto al

Nell'universo bidimensionale qui rappresentato in prospettiva, un quadrato è formato da quattro punti, A, B, C e D, disposti in modo che il percorso più breve per andare da A a B, da B a C, da C a D e da D ad A sia sempre lungo l, e che le diagonali AC e BD abbiano entrambe lo stesso valore d. La curvatura dell'universo fa sì che, a meno di eccezioni, il rapporto d/l non sia pari a $\sqrt{2}$. Un abitante di un universo del genere può dedurre «dall'interno» che il suo mondo non è piatto.

lato ci svela che la materia, essendo «discreta» (ovvero formata da unità separate le une dalle altre) è un materiale troppo grossolano per misurare lo spazio, il quale, dal canto suo, è un «continuo». Contrariamente a quello che sottintende Bradwardine, dunque, la teoria atomica non è in contraddizione con la geometria euclidea, poiché quest'ultima ha a che fare con lo spazio e non con la materia.

Oggi la questione della misura della diagonale si pone in termini completamente differenti. La teoria della relatività generale formulata da Albert Einstein agli inizi del XX secolo ha dimostrato anzitutto che l'universo è curvo: in tal caso, il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è, in linea generale, diverso da $\sqrt{2}$!

4.

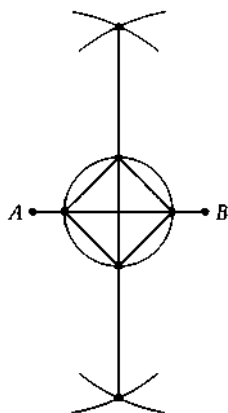
L'albero e la radice

C'è veramente da stupirsi dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$?

Il nostro sistema di numerazione deve decisamente il proprio successo più ai suoi numerosi vantaggi pratici che al suo interesse teorico: rende più facili le «quattro operazioni», fornisce un criterio molto semplice per paragonare valori diversi e, grazie ai «numeri con la virgola», consente di approssimare qualsiasi numero con la precisione voluta. Eppure non ci stupisce più di tanto che un numero come 1/7 sia restio a farsi esprimere in forma decimale (per farlo in maniera esatta bisognerebbe utilizzare un numero infinito di cifre decimali). Pur permettendo di affrontare efficacemente e con successo i problemi del quotidiano, dunque, la nostra rappresentazione dei numeri presenta dei limiti (ne approfittiamo per osservare come la disponibilità di una calcolatrice su tutti i computer e su buona parte dei telefoni cellulari renda sempre meno frequenti i calcoli fatti a mano. Dato che sono proprio questi ultimi a rendere interessante il nostro sistema di numerazione, dovremmo mantenere una certa prudenza quando si tratta di giudicarne il carattere apparentemente definitivo).

Ci sarebbe stato veramente da stupirsi se la scrittura dei numeri in base dieci (o in una qualsiasi altra base), inizialmente elaborata per rispondere a esigenze pratiche come la misura approssimata di un appezzamento agricolo o la valutazione di beni, si fosse rivelata uno strumento così potente da non lasciarsi sfuggire neanche un numero, nemmeno uno concepito per via puramente astratta. Le stesse frazioni sono solo uno strumento nato per spiegare deter-

minati fenomeni, vuoi di natura geometrica, aritmetica o addirittura mistica nel caso dei pitagorici. Come nel caso della rappresentazione decimale, dunque, non vi era motivo *a priori* perché le frazioni dovessero consentire di rappresentare dei numeri nati da situazioni per le quali non erano state inizialmente previste.

Vista in quest'ottica, l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ perde la sua stranezza per trasformarsi nel semplice riflesso di un principio molto generale che possiamo illustrare così: quando si fabbrica un martello, è per piantare dei chiodi, e non per avvitare. Decimali e frazioni costituiscono quello che gli informatici chiamano «strutture di dati»: sono dei modi per rappresentare gli oggetti, e non gli oggetti stessi. E che si tratti della numerazione babilonese in base sessanta, della rappresentazione frazionaria o della scomodissima rappresentazione romana, nessuna struttura di dati deriva da un'intento di «perfezione», ma da un bisogno di efficienza specifico di una serie di attività predefinite. Quando si tratta di mettere in evidenza delle proprietà matematiche ben precise è possibile che altre rappresentazioni dei numeri si rivelino molto più efficaci della base dieci o delle frazioni (si veda la quinta parte).

La matematica non è avara di risultati di impossibilità, che in ultima analisi non fanno altro che esprimere l'insufficienza di determinati strumenti nella risoluzione di alcuni problemi. È il caso del problema della quadratura del cerchio, che, in una delle sue tante versioni equivalenti, richiede di costruire un segmento di lunghezza π con un compasso e un righello graduato in unità. Il carattere irrisolvibile della quadratura del cerchio dipende tanto dal numero π medesimo (per essere precisi: dal suo carattere «trascendente» – vedi cap. 16) quanto dalle caratteristiche degli strumenti autorizzati dall'enunciato del problema (righello e compasso). Potendo servirsi di strumenti diversi la quadratura del cerchio diventa assolutamente fattibile, basti pensare a ciò che facevano già gli antichi Egizi e che Leonardo da Vinci esprimeva con parole di buon senso: «Gli animali che trainano i carri ci offrono una [realizzazione] semplicissima della quadratura del cerchio, realizzata dalle ruote di quei carri attraverso l'impronta della circonferenza, la quale forma una linea retta» (Ms. *G* 58 *r*). Molti altri «problemi insolubili» possono essere analizzati nello stesso modo, dall'impossibilità di disegnare un eptagono regolare con righello e compasso a quella di ricostruire un'immagine tridimensionale a partire da una sola fotografia.

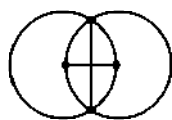
L'irrazionale «più semplice»?

Se non c'è nulla di strano nell'esistenza di animali senza pelliccia, il fatto di trovarne al Polo Nord sarebbe quantomeno inaspettato. Analogamente, pur non essendoci nulla di strano nell'esistenza dei numeri irrazionali, il fatto che la radice di 2 sia uno di loro è, dal canto suo, molto meno prevedibile. In effetti, i numeri razionali costituiscono il «regno delle quattro operazioni». Prendete due numeri razionali, sommateli, sottraeteli, moltiplicateli o divideteli: alla fine, qualunque cosa abbiate fatto, ottenete sempre un numero razionale. Con le quattro operazioni, quindi «non si può uscire dai numeri razionali». Ora, la radice quadrata di 2, «il numero che, moltiplicato per se stesso dà 2», sembra essere in tutto e per tutto un elemento di quel regno, dato che per definirlo bastano una moltiplicazione e il numero intero 2: ecco perché l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ porta con sé un gusto strano.

In fin dei conti, per evadere dal regno dei numeri razionali basta poco. A questo proposito, $\sqrt{2}$ sembra indicare addirittura il cammino più corto per riuscirci. La radice di 2 sarebbe dunque il più «semplice», il «primo» dei numeri irrazionali? Per avere una risposta è meglio cominciare con il mettersi d'accordo sulla nozione di «semplice». Il che, per l'esattezza... non è semplice! (il matematico Jacques Hadamard era solito affermare che «in matematica, le idee più naturali sono quelle che ci vengono per ultime»). A seconda del criterio prescelto si ottengono risposte diverse. Tutto ciò ci riporta alla problematica delle strutture di dati: rappresentare i numeri in modi differenti porta a idee di «semplicità» di per sé differenti.

Illustriamo quanto abbiamo appena detto con degli esempi, senza alcuna pretesa di essere esaurienti. Un primo punto di vista consiste nello stabilire che un numero irrazionale è tanto più semplice quanto più è possibile rappresentarlo attraverso una figura geometrica semplice, vale a dire una figura che possa essere costruita in pochi passi. La radice di 2, che si materializza a partire da un quadrato e dalla sua diagonale, è quindi la più semplice? Gli strumenti tradizionali del geometra, la riga e il compasso, consentono di costruire un quadrato e la sua diagonale, ma solo con un certo sforzo (si veda la figura).

Sia [AB] un segmento qualsiasi. A partire dalle intersezioni di due cerchi di ugual raggio e centro, rispettivamente, A e B, tracciamone l'asse. L'intersezione di [AB] e del suo asse è il centro di un cerchio (di raggio arbitrario) le cui intersezioni con [AB] e con l'asse sono i vertici di un quadrato (le cui diagonali risultano già tracciate).

Ben più semplice è la figura nota anche come *vesica piscis*, formata da due cerchi di ugual raggio aventi ognuno il centro sulla circonferenza dell'altro. Il rapporto tra la distanza che separa i punti di intersezione dei cerchi e quella tra i due centri è di $\sqrt{3}$: potremmo aver trovato il pretendente al titolo di «irrazionale più semplice da disegnare». E si potrebbe ancora obiettare che il numero π, che si concretizza nel rapporto tra la circonferenza e il raggio di un cerchio, richiede uno sforzo ancora minore.

Un secondo punto di vista consiste nel dire che l'irrazionale più semplice è quello di cui è più facile dimostrare l'irrazionalità. Si tratta di un criterio non facile da rendere esplicito, poiché non è facile decidere se una dimostrazione è più facile di un'altra, tanto più che per uno stesso numero irrazionale possiamo avere molte dimostrazioni differenti. Altro problema: la semplicità di una dimostrazione dipende dal contesto matematico in cui ci si cala. Se nel-

la visione contemporanea della matematica i numeri hanno un'importanza primaria, in altri tempi, ad esempio nella Grecia antica, era la geometria a costituire il fondamento della matematica (una tradizione di cui è rimasta traccia nel vocabolario fino all'inizio del XX secolo, quando si diceva ancora «geometra» per indicare un matematico).

Potremmo dire che la cosa più logica consiste nel definire come il più semplice dei numeri irrazionali quello che è stato identificato per primo come tale? In tal caso, paradossalmente, la storia è ancora più complicata, e adesso vedremo perché.

La musica e l'incommensurabile

Ci sono più teorie concorrenti che si propongono di stabilire qual è il primo numero che è stato identificato come irrazionale. Quello citato più spesso è la radice di 2, che però viene talvolta preceduta dal numero aureo, $(1 + \sqrt{5})/2$ (ritorneremo sull'argomento nei capitoli 17, 23 e 24). Nella maggior parte dei casi gli argomenti utilizzati sono di natura geometrica, essendo la geometria il contesto tradizionale della matematica greca nel cui ambito è stata fatta la scoperta.

E se la scoperta del primo numero irrazionale riconosciuto come tale fosse stata possibile grazie alla musica? L'analisi, apparentemente inedita, di questa possibilità ci allontanerà per un po' dalla radice di 2 in senso stretto, ma ci permetterà di introdurre dei concetti che ci saranno utili nel corso del capitolo 10.

Le riflessioni teoriche sull'armonia musicale risalgono alla scuola pitagorica, le cui constatazioni empiriche sono sfociate nella matematizzazione del problema della costruzione di una scala, ovvero un insieme di note separate da intervalli armoniosi. I pitagorici osservarono che l'altezza del suono prodotto da una corda era legata alla lunghezza di quest'ultima. In termini moderni, data una lunghezza di riferimento, la corda che la possiede vibra a una certa frequenza f corrispondente al numero di oscillazioni della corda in un secondo. Una corda lunga la metà produce un suono di frequenza $2f$, una lunga un terzo ne produce uno di frequenza $3f$, e così via. Le frequenze $2f$, $3f$, $4f$ ecc. sono le «armoniche» del suono

«fondamentale». Produrre simultaneamente la frequenza f e una delle sue armoniche è «armonioso», nel senso che vi è un legame fisico «diretto» tra le due frequenze, cioè fra i due suoni.

Scegliamo f pari alla frequenza di un *do*: la nota corrispondente a $2f$, quindi, è il *do* dell'ottava superiore, quella della frequenza $4f$ è il *do* dell'ottava seguente, e così via. Ogni *do* si ottiene raddoppiando la frequenza, e la successione di tutti i raddoppiamenti suddivide lo spettro delle frequenze in altrettante ottave. Qualunque suono può essere ricondotto, per raddoppiamenti o dimezzamenti successivi della sua frequenza, a un suono la cui frequenza è compresa tra f e $2f$, l'intervallo che abbiamo scelto come ottava di riferimento.

Va da sé che la serie di *do* non fornisce un numero di note sufficiente per fare della musica. Perciò dobbiamo usare una frequenza nuova, e la logica ci porta a sceglierla tra le armoniche della frequenza di riferimento f. Dato che $2f$ è già utilizzata (e definisce l'ottava), viene naturale prendere $3f$. Dividiamo questa frequenza per 2, per tornare nell'ottava di riferimento: otteniamo la frequenza $(3/2)f$, che definisce il *sol*. L'intervallo *do-sol* è la quinta.

Dunque l'ottava corrisponde al rapporto 2/1, e la quinta al rapporto 3/2. I pitagorici non si spinsero oltre nella costruzione della scala: la quinta (o, in modo del tutto equivalente, la «quarta», che corrisponde al rapporto 4/3) per definire le note, e l'ottava per riportarle entro un intervallo comune. L'idea di base consiste nell'applicare ripetutamente i rapporti 2/1 e 3/2 alle note già disponibili: ad esempio, applicando il rapporto (3/2) alla frequenza $(3/2)f$, si ottiene la frequenza $(9/4)f$ (l'intervallo tra $(3/2)f$ e $(9/4)f$ è nuovamente una quinta), che viene ricondotta all'ottava di riferimento dividendola per 2 e ottenendo così $(9/8)f$: abbiamo ottenuto il *re*, e così via. Si può dimostrare che con queste regole, e partendo da una frequenza f, tutte le frequenze ottenibili possono essere scritte nella forma $(2^m \times 3^n)f$, dove m e n sono interi (positivi o negativi). Ad esempio, è possibile ottenere le frequenze $(9/8)f$ (ovvero $(2^{-3} \times 3^2)f$, $(8/3)f$ (cioè $(2^3 \times 3^{-1})f$), $6f$ (cioè $(2^1 \times 3^1)f$), ecc.

Se si fossero potuti ordinare adeguatamente i suoni così ottenuti per frequenze crescenti (o decrescenti), come i tasti di un pianoforte, sarebbe stato perfetto. Ma è proprio qui che i pitagorici si sono trovati di fronte a un problema cruciale: uno strumento capa-

ce di contenere tutte le note ottenute dal principio precedente non si limiterebbe a racchiudere tra i due *do* di un'ottava le note cui siamo abituati, ma dovrebbe contenerne un'infinità! Perché? Perché le armoniche di forma $3^n f$, una volta ricondotte all'ottava di riferimento (dividendo per due ogniqualvolta sia necessario per ciascuna di esse), producono suoni tutti differenti tra di loro. In effetti, immaginiamo di prendere due armoniche espresse in questa forma, diciamo $3^n f$ e $3^{n'} f$ dove n e n' sono due interi distinti (con n', nel seguito, maggiore di n). Ricondurre tali armoniche all'ottava di riferimento equivale a dividere la prima per 2^m e la seconda per $2^{m'}$, dove m e m' sono tali che $3^n/2^m$ e $3^{n'}/2^{m'}$ siano entrambi compresi tra 1 e 2. Se le note così ottenute fossero le stesse, avremmo che $3^n/2^m = 3^{n'}/2^{m'}$, e cioè che $2^{m'-m} = 3^{n'-n}$. Ciò, tuttavia, è impossibile, perché il membro di sinistra è pari mentre quello di destra è dispari. Nell'ottava di riferimento, quindi, le armoniche esprimibili nella forma $3^n f$ creano tante note quanti sono gli interi n, ovvero un'infinità.

L'impossibilità di stabilire una scala al tempo stesso completa e finita sulla base delle regole fissate dai pitagorici, dunque, non è altro che l'espressione dell'impossibilità di trovare una coppia di interi p e q non nulli tali che $2^p = 3^q$; si può pensare ragionevolmente che i pitagorici lo avessero capito, pur esprimendo il concetto in forma diversa. Ora, l'analisi moderna, le cui origini risalgono al XVII secolo ma che si sviluppò pienamente nel corso del secolo successivo, ci dimostra che quest'ultima impossibilità si traduce nel fatto che il «logaritmo a base 2 del numero 3», che si indica come $\log_2 3$, è un numero irrazionale (torneremo sulla nozione di logaritmo nel corso del capitolo 13; per ora ci basti sapere che $\log_2(3)$ è l'unico numero x tale che $2^x = 3$: se esistessero due numeri interi p e q tali che $\log_2(3) = p/q$, allora avremmo $2^{p/q} = 3$, cioè $2^p = 3^q$, il che, come abbiamo visto poco fa, è impossibile).

È del tutto possibile che gli studi dei pitagorici sull'armonia musicale abbiano preceduto le loro ricerche matematiche sull'irrazionalità. Perciò si potrebbe difendere l'idea che $\log_2(3)$ sia stato «il primo irrazionale riconosciuto in quanto tale» anche se si è dovuto aspettare fino al XVIII secolo prima di poter esprimere in questa forma le conclusioni cui erano arrivati i pitagorici. In effetti, fu solo nel 1761 che Johan Lambert fornì la dimostrazione dell'irraziona-

lità di $\log_2(3)$, accludendola a un lavoro conosciuto soprattutto per essere stato il primo a dimostrare l'irrazionalità di π e presentandola come una conseguenza dei risultati generali dell'articolo.

La radice quadrata di 2 esiste realmente?

Passare dall'impossibilità di trovare due interi p e q (non nulli) tali che $2^p = 3^q$ all'irrazionalità di $\log_2(3)$ ha un che di gratuito leggermente fastidioso. Il fatto che non esistano due interi non nulli p e q tali che $2^p = 3^q$ è già sufficiente per chiudere la questione delle note musicali: che interesse c'è, allora, a introdurre sulla scena il numero $\log_2(3)$? Più precisamente: questo numero ha una realtà a sé stante, o non è altro che un'astrazione che permette di esprimere in altro modo il fenomeno matematico studiato dai pitagorici?

La stessa questione si pone per la radice di 2, di cui, nel corso del XIX secolo, sono state date definizioni la cui astrazione non ha nulla da invidiare a quella di $\log_2(3)$: «l'insieme dei numeri razionali il cui quadrato è inferiore a 2» non ha nulla del potere evocativo della semplice figura composta da un quadrato e dalla sua diagonale. Ora, se per avere una definizione corretta questo è un passaggio obbligato, non è forse vero che il buon senso ci spinge a concludere che in realtà il concetto non è altro che una pura astrazione, priva di un'esistenza reale? Dopotutto, nel mondo «reale» la radice di 2, per così dire, non compare mai. Essendo impossibile tracciare un quadrato perfetto, il rapporto tra le lunghezze effettive della diagonale e del quadrato non è mai rigorosamente uguale a $\sqrt{2}$.

Tutto ciò basta ad affermare che la radice di 2 non esiste? Dimostrare che gli oggetti matematici sono reali (o che non lo sono) è, per così dire, impossibile. Le grandi discussioni sull'argomento, che hanno appassionato tanti grandi pensatori fin dai tempi di Platone, non sono mai approdate a una conclusione: peggio ancora, non offrono alcuna prospettiva. Certo, per essere più efficaci, i matematici che si occupano della radice di 2 si sentono in dovere di parlarne come di un *essere*. Lo stesso, però, accade al romanziere con i personaggi delle sue storie, ma non per questo lo scrittore crede realmente alla loro esistenza – sebbene Boris Vian scriva, nell'introduzione a *La schiuma dei giorni*, che «la storia è assolutamente vera, dato che l'ho immaginata dall'inizio alla fine».

Ma è davvero così importante sapere se la radice quadrata di 2 esiste davvero? È indubbiamente meglio chiedersi cosa la rende così utile in circostanze così diverse, come avremo occasione di vedere in molti esempi nella terza parte del libro, Per riprendere l'espressione di Eugene Wigner, la «irragionevole efficacia della matematica», di questa scienza che ci è così indispensabile ma i cui fondamenti – opera essenzialmente greca – sono così poco legati a fini di ordine pratico, è per noi una grande fonte di stupore e di ammirazione.

L'albero e la radice

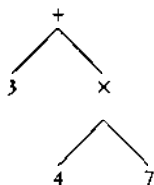
Le definizioni astratte della radice di 2 che abbiamo visto nel capitolo precedente hanno un'alternativa, dovuta a una scienza che ha inciso profondamente sul modo di percepire molte entità matematiche: l'informatica.

Un computer è ancora meno indulgente di uno studente svogliato o di un lettore scettico: in quanto macchina, bisogna spiegargli *tutto* in ogni minimo dettaglio, con un rigore che non tollera il benché minimo errore. Altra caratteristica particolare: il computer può lavorare solo con una quantità finita di oggetti. Tutti questi vincoli hanno reso necessaria una nuova definizione della radice di 2 che, pur senza sostituirsi alle precedenti, è attualmente l'unica impiegata nei programmi di «calcolo formale».

In parole povere, il calcolo formale è un tipo di calcolo in cui gli oggetti sono visti attraverso le loro proprietà, e non attraverso delle approssimazioni. Una calcolatrice che non utilizza il calcolo formale non è in grado di effettuare correttamente un calcolo del tipo $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$, poiché non contempla l'esistenza di un «oggetto $\sqrt{2}$», ma solo quella di un'approssimazione a un certo numero di cifre decimali. Su una macchina simile, in generale, il risultato dell'operazione $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ è qualcosa del tipo 1,9999999. Il calcolo formale tende a evitare approssimazioni così rischiose.

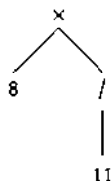
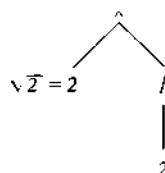
Ma come «spiegare» al computer a cosa corrisponde la radice di 2? La risposta, una volta di più, sta nel considerare la questione dal punto di vista delle strutture di dati: bisogna trovare un modo di «scrivere $\sqrt{2}$ nel computer» in una forma che non ne alteri le carat-

teristiche fondamentali. Per uno dei capricci cui ci ha abituato la storia della matematica, la soluzione discende in maniera diretta da studi effettuati circa un secolo prima della costruzione del primo computer. È verso il 1860, in effetti, che il matematico britannico Arthur Cayley introduce il concetto di «albero», una struttura di dati attualmente tra le più utilizzate. L'obiettivo di Cayley, però, non è quello di rappresentare un'espressione come $\sqrt{2}$. È solo qualche decina di anni più tardi, nel 1929, che il logico polacco Jan Łucasiewicz inventa una notazione delle espressioni algebriche fondamentalmente equivalente agli alberi, e che oggi conosciamo come «notazione polacca» (sembra che la ragione principale per cui l'invenzione di Łucasiewicz viene ricordata solo con la nazionalità del suo artefice stia nella difficoltà di pronunciarne e scriverne il cognome!)

Nel 1957, infine, l'australiano Charles Hamblin, filosofo e informatico al tempo stesso, inventa il linguaggio di programmazione GEORGE («GEneral ORder GEnerator»), in cui per la prima volta un computer utilizza la notazione polacca (per essere più precisi, la «notazione polacca inversa», identica in tutto e per tutto a eccezione dell'ordine). L'interesse per questa notazione è legato al fatto che i calcoli da effettuare seguono un ordine ben preciso, così da limitare al massimo il numero di risultati intermedi immagazzinati nella memoria del calcolatore.

Torniamo agli alberi, che, come abbiamo detto, sono un modo equivalente di rappresentare la notazione polacca. Un albero è composto da un punto di partenza, la *radice*, da cui si dipartono una o due linee, gli «archi», in direzione di altri punti, i «nodi», dai quali possono partire uno o due archi verso nuovi nodi, e così via (non è consentito ritornare su uno dei nodi precedenti). Ci sono due vincoli: da un lato, su un dato nodo arriva un solo arco (a eccezione della radice, dove non ne arriva nessuna); dall'altro, ai nostri alberi è vietato possedere un'infinità di nodi.

Ogni nodo ha un'etichetta, che nel nostro caso potrà essere un numero intero o il segno di un'operazione aritmetica elementare. Quando, nell'utilizzare un software di calcolo formale, si digita «$3 + (4 \times 7)$», il programma traduce l'espressione in un albero, come negli esempi seguenti. Osserviamo come, diversamente dai loro omonimi in legno, gli alberi del calcolo formale tendono a essere rappresentati con la radice in alto!

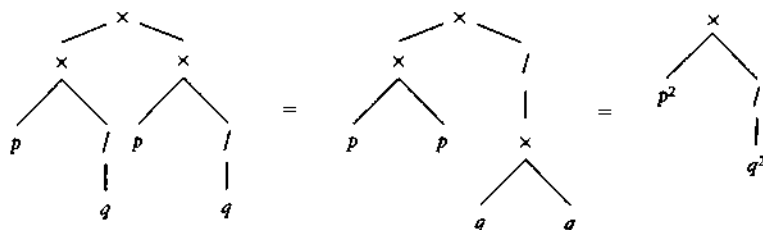
La notazione polacca, dal canto suo, riduce l'albero alla lista delle etichette che si ottengono percorrendo i nodi a partire dalla radice, muovendosi da sinistra a destra e risalendo di un livello solo quando non si può più fare altrimenti (la notazione polacca inversa si limita a invertire l'ordine del cammino).

Nei nostri primi due esempi, $3 + (4 \times 7)$ e 6^4, il calcolo può essere effettuato in maniera esatta, e il software è in grado di eseguirlo. Nell'ultimo esempio, invece, è impossibile giungere a un risultato esatto, poiché la rappresentazione decimale (o binaria) della frazione 8/11 richiede un'infinità di cifre decimali. In questo caso, il programma lascia l'espressione in questa forma, nell'attesa che un calcolo complementare (una moltiplicazione per 11, ad esempio) consenta di semplificarla.

La rappresentazione consente di memorizzare la radice di 2 nel computer in maniera esatta. Il suo albero (che corrisponde all'espressione $\sqrt{2} = 2^{1/2}$) dà un'arma ai partigiani dell'esistenza effettiva di $\sqrt{2}$, poiché la descrive con una quantità finita di oggetti. Se la radice di 2 esiste, forse ha le sembianze di un albero.

Rappresentazione ad albero dell'espressione $3 + (4 \times 7)$. Il nodo contrassegnato da «×» ha due «figli», contrassegnati da «4» e «7»: questa parte dell'albero rappresenta il prodotto 4×7. La radice, indicata da «+», possiede due figli, «3» e «×»: il segno + indica l'addizione di 3 con il risultato della moltiplicazione di 4 per 7 (in notazione polacca, quest'albero si scrive come + 3 × 4 7, mentre in notazione inversa diventa 7 4 × 3 +).

Rappresentazione ad albero dell'espressione 6^4 (l'operatore di elevazione a potenza è indicato da ^).

Rappresentazione ad albero dell'espressione 8/11. I programmi di calcolo formale, di solito, non definiscono la divisione, ma solo il passaggio all'inverso, indicato con «/». La divisione di due interi, dunque, viene ricondotta alla moltiplicazione del numeratore per l'inverso del denominatore: 8/11 si rappresenta come $8 \times (1/11)$.

L'albero e la radice (notazione polacca: ^2/2. Notazione polacca inversa: 2/2^).

L'irrazionalità nella lingua degli alberi Si dice «irrazionale» un albero che non può essere ricondotto a un altro albero dello stesso tipo di quello che rappresenta 8/11 mediante le regole di transizione tra alberi (regole speculari a quelle del calcolo tradizionale). Da questo punto di vista, dimostrare che la radice quadrata di 2 è irrazionale significa stabilire l'impossibilità di trovare un razionale (in forma di albero) che, moltiplicato per se stesso, si semplifichi fino a dare un albero ridotto alla sola radice, contrassegnata da «2».
Consideriamo dunque l'albero di un numero razionale p/q, dove si suppone che p e q non abbiano divisori comuni. Moltiplichiamo questo albero per se stesso: applicando in successione le regole di semplificazione degli alberi, che corrispondono a quelle comunemente utilizzate per le frazioni, si ottiene:

$$\left(\text{equivalente a: } \frac{p}{q}\times\frac{p}{p}=\frac{p\times p}{q\times q}=\frac{p^2}{q^2}\right).$$

Se che p e q non hanno divisori comuni, neanche p^2 e q^2 ne hanno, e dunque il nostro albero non può ridursi a un altro più semplice. Moltiplicare un albero razionale per se stesso, quindi, non dà mai origine all'albero ridotto alla sola radice contrassegnata da «2», il che equivale a dire che $\sqrt{2}$ è irrazionale.

Quel che avete appena letto è la traduzione nella lingua degli alberi di quella che rappresenta indubbiamente la più bella dimostrazione aritmetica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ (e che può essere estesa con facilità a tutti i numeri con la forma $\sqrt[k]{n}$). Quest'ultima si fonda sul risultato seguente, che è al tempo stesso molto intuitivo e molto facile da dimostrare: se due numeri interi, p e q, non hanno divisori comuni, allora neanche p^2 e q^2 ne hanno (è un risultato che figura già negli *Elementi* di Euclide, alla proposizione 29 del libro VII). Perciò, se p/q è una frazione irriducibile, anche p^2/q^2 lo è. Se $p/q = \sqrt{2}$, allora $p^2/q^2 = 2$: dato che, come si è detto, p^2/q^2 è irriducibile, dev'essere $q^2 = 1$, e dunque $q = 1$, e $p^2 = 2$, il che è impossibile dato che non esistono numeri interi il cui quadrato sia uguale a 2.
Anche se l'argomento chiave di questa bella dimostrazione si deve a Euclide, non è così che si è dimostrata negli *Elementi* l'irrazionalità dei numeri del tipo $\sqrt{n}$ (il ragionamento si trova in una nota di Richard Beigel pubblicata nel 1991, ma non sappiamo se sia già stato espresso in forma esplicita in precedenza – il che è probabile).

Se la definizione arborescente della radice di 2 sembra essere ben lontana dall'immagine antica del quadrato e della sua diagonale, le due visioni restano comunque strettamente legate. C'è chi trarrà da questa convergenza la conclusione che la radice quadrata di 2 esiste realmente, come punto di incontro di lingue diverse. Gli altri risponderanno che tutto ciò non è che un riflesso dell'identità biologica tra il cervello dello scriba babilonese, quello dell'informatico del XX secolo e quello del lettore del XXI; ciò non toglie che nulla impedisce di chiamare tale riflesso – sempre ammesso che ve ne sia uno – radice quadrata di 2.

Appendice alla parte prima

Il primo testo sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Questo brano del commento di Alessandro di Afrodisia agli *Analitici primi* di Aristotele rappresenta la più antica dimostrazione dell'incommensurabilità specifica di due grandezze, perlomeno tra i testi antichi che ci sono giunti (Euclide, dal canto suo, prendeva in considerazione classi di grandezze incommensurabili tra di loro). La traduzione che ne diamo qui è originale.

Nel 1975, Wilbur Knorr ha realizzato una parafrasi e un'analisi del testo. Pochissimo tempo prima della pubblicazione di questo libro abbiamo appreso l'esistenza di una traduzione francese ad opera di Bernard Vitrac (che comincia con «Sia ΑΒΓΔ una regione quadrata ...») inserita nella sua traduzione degli *Elementi* di Euclide. Ian Mueller, dell'università di Chicago, è l'autore di una traduzione americana in più volumi delle opere di Alessandro; in un volume di prossima pubblicazione compare una versione del brano che ci interessa.

Si noti che, per quanto concordi sull'essenziale, le tre traduzioni differiscono sul senso esatto da dare alla presenza dei numeri E e Z: su questo punto particolare abbiamo deciso di correggere leggermente il testo originale, per dargli una maggior coerenza matematica.

Dato che il punto di vista di Alessandro potrebbe disorientare un po' un lettore del XXI secolo, abbiamo fatto seguire il testo da qualche spiegazione complementare. Le prime due linee contengono le parole di Aristotele (*Analitici primi*, 41 a 26), dopo di che si passa al commento di Alessandro.

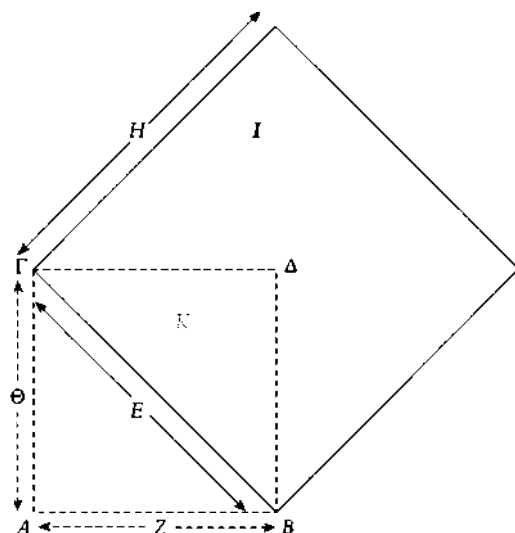
La diagonale è incommensurabile al lato, poiché imporne la commensurabilità renderebbe i dispari uguali ai pari.

[Aristotele] utilizza come esempio del ragionamento per assurdo quello della diagonale, e se ne serve per illustrare come si riesca a provare una certa tesi attraverso un ragionamento per assurdo. Chi voglia fare questa dimostrazione non si serve di un sillogismo per dedurre che la diagonale è incommensurabile al lato, il che è vero e va dimostrato, ma, esaminando l'ipotesi inversa, secondo la quale il lato e la diagonale sono commensurabili, dimostra direttamente con un sillogismo che da quell'ipotesi si deduce l'uguaglianza tra pari e dispari. Dato che ciò è impossibile, si scarta l'ipotesi che conduce a tale conclusione; il rifiuto dell'ipotesi porta a dimostrarne il contrario, ovvero che la diagonale non è commensurabile al lato (dato che, in una contraddizione, o è vera una proposizione o è vera l'altra), così come si era detto inizialmente.

Ecco il ragionamento che, partendo dall'ipotesi che la diagonale sia commensurabile al lato, conduce all'uguaglianza tra pari e dispari. Sia ΑΒΓΔ una regione quadrata, e sia ΒΓ una delle sue diagonali. Se la diagonale ΒΓ è commensurabile al lato ΑΒ, essa avrà con quest'ultimo un rapporto da numero a numero. In effetti, è ciò che ci dice Euclide nel libro X degli *Elementi*, affermando che «le grandezze commensurabili tra di loro hanno un rapporto da numero a numero»: è il quarto teorema del libro X. Supponiamo, quindi, che la diagonale ΒΓ stia al lato ΒΑ come il numero Ε sta al numero Ζ. I due numeri sono scelti per essere i più piccoli tra tutti quelli legati dal medesimo rapporto, e dunque sono primi tra di loro. In effetti, che «i numeri più piccoli tra tutti quelli legati dallo stesso rapporto sono primi tra di loro» è stato dimostrato nel libro VII degli *Elementi* di Euclide. I numeri primi tra di loro non sono misurati [simultaneamente] che dall'unità. Moltiplichiamo entrambi i numeri Ε e Ζ, il primo per l'identico valore Η, ottenendo Ι, e il secondo per l'identico valore Θ, ottenendo Κ. I numeri Ι e Κ, pertanto, sono dei quadrati, e sono primi tra di loro. Nel libro VII degli *Elementi*, in effetti, si dimostra che, dati due numeri primi tra di loro, se ognuno di essi è moltiplicato [per un valore a lui identico], i numeri risultanti sono essi stessi primi tra di loro. Quindi, dato che la diagonale ΒΓ sta al lato ΑΒ come il numero Ε sta al numero Ζ, e dato che Ε sta a Ζ come Η sta a Θ, la diagonale ΒΓ sta al lato ΑΒ come il numero Η sta a Θ. Il quadrato costruito sulla diagonale ΒΓ, paragonato a quello costruito sul lato ΑΒ, sarà dunque come quello costruito su Η, paragonato a quello costruito su Θ; questi ultimi due corrispondono a Ι e a Κ. Il quadrato costruito sulla diagonale è doppio rispetto a quello costruito sul lato. Perciò il numero Ι è il doppio del numero Κ. Ι, dunque, è pari; in effetti, ogni numero doppio di un altro è pari, poiché lo si può dividere in due parti uguali. Ma allora la metà di Ι sarà pari, poiché, tra i numeri quadrati, le metà di quelli che si dividono in due parti uguali sono pari. Dunque Κ è pari, in quanto metà di Ι che è di per sé un quadrato. Ma è anche dispari, perché Ι e Κ sono primi tra di loro, ed è impossibile che due numeri pari siano primi tra di loro. I numeri pari, infatti, non ammettono solo l'unità come misura comune, a differenza dei numeri primi [tra di loro]. Non c'è dubbio,

dunque, che i due numeri siano dispari [o che lo sia almeno uno dei due]. Entrambi, però, sono pari, come si è potuto dedurre dall'ipotesi. Supponendo che la diagonale sia commensurabile al lato, quindi, si arriverebbe a concludere che i dispari sono uguali ai pari, il che è impossibile.
La conclusione della dimostrazione è che i dispari sono uguali ai pari, il che è falso. Si è dimostrato, così, che la diagonale è incommensurabile al lato, come da ipotesi. Avendo dimostrato attraverso un ragionamento che l'ipotesi contraria conduce a un risultato impossibile, la confutazione di tale ipotesi è una dimostrazione dell'incommensurabilità – dato che una delle due proposizioni è necessariamente vera.

Servendoci del linguaggio moderno, esprimiamo il rapporto delle lunghezze BΓ e AB sotto forma di frazione E/Z (notiamo come, di fatto, è del terzo teorema del libro X degli *Elementi*, e non del quarto, che ha bisogno Alessandro per passare dal rapporto di due lunghezze a quello di due numeri; è decisamente possibile che Alessandro abbia fatto confusione tra i teoremi 3 e 4, che in realtà sono l'uno il reciproco dell'altro). I numeri E e Z che rendono irriducibile la frazione sono primi tra di loro.

L'area del quadrato costruito su BΓ è doppia rispetto a quella del quadrato costruito su AB; il fatto che Alessandro non si preoccupi

[NB: in questa figura, i numeri E, Z, ecc. sono presi come lunghezze dei lati dei quadrati, anche se ciò non corrisponde a quello che dice Alessandro (da un punto di vista matematico, ovviamente, il testo e la figura sono equivalenti).]

di dimostrare una proprietà così cruciale, e che invece non esiti a descrivere alcuni punti della sua dimostrazione addirittura con una certa ridondanza, è quantomeno curioso; in un'edizione degli *Elementi* di Euclide che riprende lo stesso ragionamento svolto di Alessandro nella famosa proposizione 117 (vedi cap. 2), se ne dà una giustificazione attraverso la proposizione 47 del libro I, vale a dire il teorema di Pitagora (corretto, ma inutilmente complicato: Platone ne dava una dimostrazione molto più semplice – vedi cap. 9). Quindi si può scrivere $B\Gamma^2 = 2AB^2$, o anche $E^2 = 2Z^2$ (o, per riprendere la notazione di Alessandro, $E \times H = Z \times \Theta$, dato che $H = E$ e $\Theta = Z$), e dunque E^2 è un numero pari. Ora, se il numero E^2 è pari, anche la sua metà è un numero pari (dimostrazione: se E^2 è pari, lo è anche E, altrimenti $E^2 = E \times E$ sarebbe (dispari) $\times$ (dispari), e quindi dispari; perciò, E^2, prodotto di un numero pari per se stesso, è multiplo di 4, e dunque $E^2/2$ è pari).

La relazione $E^2 = 2Z^2$ si può riscrivere come $Z^2 = E^2/2$, e dunque, dato che $E^2/2$ è pari, lo è anche Z^2. Perciò i numeri E^2 e Z^2 sono entrambi pari. Tuttavia, non avendo alcun fattore in comune (proposizione 29 del libro VII degli *Elementi*: «Se due numeri primi tra di loro sono moltiplicati ognuno per se stesso, i prodotti sono primi tra di loro»), almeno uno dei due deve essere dispari.

Uno dei due numeri, dunque, deve essere simultaneamente pari e dispari, e ciò è impossibile.

Parte seconda

L'irrazionale

«O nobilissimi fra tutti i Greci, questa non è forse una di quelle cose di cui dicevamo che è turpe non conoscere?»

Platone, *Leggi*, VII, 820 b.

L'irrazionalità della radice quadrata di 2, vale a dire il fatto che non esistano due interi p e q tali che $\sqrt{2} = p/q$, è una delle sue proprietà più fondamentali. Esiste almeno una ventina di modi per convincersi di tale risultato (vedi l'indice a p. 407), ma una di queste è diventata un passaggio obbligato, e finisce spesso per mettere un po' in ombra le altre. Il capitolo 5 è consacrato integralmente a questa dimostrazione «classica» e alle sue varie implicazioni relative ai concetti di infinito e di ragionamento matematico.

Il capitolo 6 è dedicato ad altre dimostrazioni e varianti, che hanno in comune con la dimostrazione classica il fatto di basarsi tutte sulla distinzione tra numeri pari e numeri dispari. Molte dimostrazioni dell'irrazionalità della radice di 2 si fondano proprio su tale distinzione. Anche se ignoriamo in che modo la scuola pitagorica giunse alla determinazione dell'irrazionalità, è lecito pensare che il pari e il dispari abbiano svolto un ruolo nella prima di tutte le dimostrazioni; anche se così non fosse, le ricerche in tale direzione presentano comunque un interesse, poiché potrebbero portare a nuove dimostrazioni.

Nel capitolo 7, un'ulteriore dimostrazione della radice di 2 costituisce lo spunto per introdurre alcuni degli strumenti dell'aritmetica, grazie ai quali diventa possibile, in certi contesti, concepire la radice di due come razionale! Le nozioni presentate nel corso del capitolo trovano un'estensione nel concetto di «numero g-adico», analizzato nel capitolo 8. Nel paese di questi numeri bizzarri, la radice di 2 possiede degli avatar le cui proprietà non sono poi così lontane dalle sue.

Tutto questo interesse per la possibilità di arrivare a uno stesso risultato in modi diversi potrà apparire strano. In realtà, anche se la grande varietà di dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ costituisce di per sé un'occasione di stupore, l'esistenza di tanti percorsi diversi che portano a un unico fatto matematico è soprattutto, nella maggior parte dei casi, la prova di una grande ricchezza teorica. Molte teorie matematiche, dai numeri *g*-adici alle frazioni continue (si veda la quinta parte), possono essere introdotte come estensione di tale o talaltra dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. È per questo che la lista di tutte queste dimostrazioni non va vista come un catalogo di ricette, ma come un albero, i cui rami, inizialmente raggruppati intorno a uno stesso tronco, si distendono ognuno in una direzione diversa.

5.

Un numero il cui quadrato vale 2

La dimostrazione più comune dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ si basa sulla definizione seguente della radice quadrata di 2: «un numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2». Pur essendo indubbiamente la più famosa, questa dimostrazione non è la più corta, né la più semplice o la più elegante. Le si possono preferire delle varianti, ma ha assunto ormai una posizione così centrale che risulta difficile ignorarla. Nel seguito del libro la chiameremo «dimostrazione classica». In questo capitolo la illustreremo insieme alle idee che ne costituiscono il fondamento e ad alcune delle loro estensioni naturali.

La dimostrazione classica

Il ragionamento funziona così: supponiamo di aver trovato una frazione p/q che sia uguale a $\sqrt{2}$, e che tale frazione sia in forma «irriducibile», ovvero che p e q non abbiano fattori comuni (qualsiasi frazione può essere messa in forma irriducibile, semplicemente dividendo il numeratore e il denominatore per i loro fattori comuni; ad esempio, la frazione 24/14 non è irriducibile, poiché 2 è un divisore comune a 24 e a 14; dividendo entrambi i numeri per due si ha 24/14 = 12/7, che, invece, è irriducibile).

Elevando al quadrato l'uguaglianza $p/q = \sqrt{2}$, si ottiene: $(p/q)^2 = p^2/q^2 = 2$, e quindi $p^2 = 2q^2$. Se ne deduce che p^2 è un numero pari (in quanto doppio di un intero, nella fattispecie q^2). Ora, se p^2 è pari, allora lo è anche p, poiché, in virtù della relazione (dispari) $\times$ (dispari) = (dispari), il quadrato di un numero dispari non sarà

mai un numero pari. Dato che p è pari, esisterà un intero p' tale che $p = 2p'$. Perciò si ha $p^2 = (2p')^2 = 4p'^2$. L'uguaglianza $p^2 = 2q^2$, dunque, si riscrive come $4p'^2 = 2q^2$, e quindi $2p'^2 = q^2$. Se ne deduce che q^2 è pari e, per lo stesso ragionamento di poco fa, che q è pari.

Abbiamo ottenuto, perciò, che p e q sono entrambi pari, contraddicendo l'ipotesi iniziale per cui p e q non hanno divisori comuni. Supporre che esista una frazione p/q uguale a $\sqrt{2}$, dunque, conduce a una contraddizione, che rende insostenibile l'ipotesi in questione. Perciò non esiste alcuna frazione uguale a $\sqrt{2}$: abbiamo così dimostrato l'irrazionalità della radice quadrata di 2. Questo modo di ragionare, che consiste nel supporre che una certa ipotesi sia vera per poi costruire su di essa un ragionamento che sfocia su un'incoerenza – grazie alla quale possiamo infine concludere che l'ipotesi iniziale era falsa – è detto «ragionamento per assurdo» (ci ritorneremo nel corso del capitolo).

Da questa dimostrazione si ottiene qualcosa di più della semplice irrazionalità di $\sqrt{2}$. In effetti, non vi si utilizza la radice di 2 in quanto tale, ma in quanto «numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2». Ora, ci sono due numeri che soddisfano questa proprietà: $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$. La dimostrazione classica, dunque, stabilisce simultaneamente l'irrazionalità di questi due numeri. Anche se l'irrazionalità di $-\sqrt{2}$ non ha certamente nulla di stupefacente, vale la pena notare che non tutte le dimostrazioni dell'irrazionalità della radice di 2 mostrano contemporaneamente quella del suo opposto. In particolare, vedremo delle dimostrazioni di irrazionalità che partono da un punto di vista geometrico anziché aritmetico (ad esempio, definendo $\sqrt{2}$ come il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato). Dato che la geometria lavora solo con delle lunghezze, e che queste sono rappresentate da numeri positivi, le dimostrazioni di irrazionalità dedotte dalla geometria non portano alla dimostrazione simultanea dell'irrazionalità di un numero come $-\sqrt{2}$.

È possibile adattare la dimostrazione classica per stabilire l'irrazionalità di altri numeri. Tra questi, viene spontaneo pensare anzitutto alle radici quadrate di interi qualunque, come $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, eccetera. Un enunciato di carattere generale afferma che, se n è un intero che non è un quadrato perfetto (ovvero che n non è esprimibile come k^2 con k intero), allora $\sqrt{n}$ è irrazionale (Platone attribuisce il teorema a Teeteto – vedi cap. 2). La dimostrazione clas-

sica, però, si estende alle radici cubiche, a quelle quartiche e, più generalmente alle n-esime. Ricordiamo che, dato un numero positivo x, si definisce *radice n-esima di x* ($\sqrt[n]{x}$) l'unico numero positivo che, moltiplicato n volte per se stesso, dà x (si ha così, per esempio, $\sqrt[4]{81} = 3$, dato che $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$). L'enunciato più generale che si può ottenere dalla sequenza di argomenti della dimostrazione classica è il seguente: per qualunque intero n (maggiore di 1), e per qualunque intero k, se k non è esprimibile come m^n (con m intero), allora $\sqrt[n]{k}$ è irrazionale – e con lui il suo opposto. Siamo giunti all'orizzonte estremo della dimostrazione classica: per assicurarsi dell'irrazionalità di altri tipi di numeri, come $\sqrt{j} + \sqrt{k}$ (con j e k interi) è necessario impostare un ragionamento un po' più elaborato (nell'appendice al termine di questa parte di libro illustreremo un modo alternativo – e non propriamente ortodosso – di dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt[n]{2}$, che non è possibile estendere per mostrare, in maniera più generale, l'irrazionalità delle radici n-esime dei numeri interi).

Come abbiamo potuto vedere, la dimostrazione classica è un po' lunga, per non dire un po' carente. Il suo merito, tuttavia, è di mettere in evidenza varie idee-guida che formano l'ossatura di numerose dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Vediamo quali sono queste idee.

Il giorno in cui $\sqrt{2}$ divenne razionale per legge Da che mondo è mondo, dilettanti inesperti si lanciano ad affrontare i grandi temi della matematica, redigendo testi appassionati che dovrebbero dimostrare chi il teorema di Fermat (si veda l'appendice a questa parte), chi la quadratura del cerchio. Nella maggiore parte dei casi si tratta di tentativi che non lasciano traccia, ma esistono qua e là alcune eccezioni divenute celebri. Una di queste è legata al nome di un americano, Edward Goodwin, che, nel 1897, riuscì a far votare in prima lettura all'Assemblea generale dello stato dell'Indiana un testo che, tra le altre cose, avrebbe dovuto legalizzare il «vero» valore della radice di due, vale a dire... 10/7. La legge non entrò mai in vigore per dell'intervento di un insegnante di matematica, Clarence Waldo, il quale riuscì a impedire che il testo fosse adottato in seconda lettura al Senato.

La proposta di legge, divenuta celebre tra i matematici ma il cui contenuto è di difficile interpretazione, talmente è confuso e incoerente, è nota come *Pi Bill* (il «progetto di legge su pi greco»): il suo obiettivo principale era quello di fissare il valore di π a... 3,2. La radice quadrata di 2, evocata nel *Pi Bill* attraverso la diagonale del quadrato, è l'unico altro numero di cui il testo si proponeva di fissare il valore (più precisamente, l'articolo 2 del suddetto *Indiana House Bill* n. 246 precisava che «il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato è di dieci a sette»). Il *Pi Bill* è la sintesi di un articolo ancora più oscuro e privo di senso, intitolato *Quadrature of the Circle*, che Goodwin aveva pubblicato nel luglio del 1884 in uno dei primissimi numeri di una rivista, «The American Mathematical Monthly», che gode attualmente di un prestigio indiscusso ma che a quei tempi – è il minimo che si possa dire – non era così attenta come oggi al contenuto degli articoli pubblicati (l'impossibilità della quadratura del cerchio era stata stabilita definitivamente nel 1882 da Ferdinand Lindemann). All'inizio dell'articolo, comunque, si può leggere una nota bizzarra, nella quale si avverte che il testo «è stato pubblicato su richiesta dell'autore»!
Goodwin è ben lungi dall'essere il primo dilettante strampalato a proporre un valore razionale per π; tuttavia è più raro trovare dei dilettanti che propongano di dare un valore razionale a $\sqrt{2}$. Vi si può scorgere l'effetto combinato di una maggior «mediatizzazione» di π (un numero capace di stimolare maggiormente l'immaginazione) e del fatto che, essendo molto più facile dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che quella di π, anche un dilettante poco pratico di matematica accetta la prima più facilmente della seconda.

La presenza dell'infinito

La presenza dell'infinito nella dimostrazione classica è, per così dire, mascherata, ma il suo ruolo è essenziale. Lo si può vedere meglio partendo dalla variante in cui non si parte dall'ipotesi che p e q siano privi di divisori comuni. Una volta giunti a dimostrare che p e q sono entrambi pari, la contraddizione non viene dall'assenza di divisori comuni, ma dal fatto seguente: partiti da due numeri interi positivi p e q tali che $p/q = \sqrt{2}$, ne abbiamo trovati

altri due, p' ($=p/2$) e q' ($=q/2$) che verificano l'uguaglianza $p'/q' = \sqrt{2}$ e che sono strettamente inferiori a p e q. In pratica, siamo «scesi» da p e q a p' e q'. E il ragionamento può essere ripetuto: partendo da p' e q', «scendiamo» fino a due altri numeri interi positivi strettamente inferiori, e così via. Ora, non è possibile continuare così all'infinito, poiché i numeri interi positivi inferiori a p e q sono in quantità limitata: perciò si finisce per arrivare alla contraddizione attesa, che dimostra l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Questa tecnica di dimostrazione, che consiste nel costruire un'impossibile successione infinita di interi positivi sempre più piccoli, si chiama «discesa infinita». La dimostrazione classica la utilizza in modo implicito, poiché sfrutta il risultato per cui ogni frazione può essere espressa in forma irriducibile, e la dimostrazione più comune di tale risultato passa proprio per un ragionamento del tipo «discesa infinita» (al cap. 18 vedremo invece una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che passa per una «salita infinita»).

Il fatto che nella dimostrazione sia presente l'infinito induce a pensare che la primissima dimostrazione matematica di irrazionalità o di incommensurabilità (della radice quadrata di 2, o di un altro numero irrazionale) possa essere stata anche una delle primissime dimostrazioni matematiche in assoluto. L'apparizione, per così dire, spontanea dell'infinito non autorizza, in effetti, il ricorso a una vaga intuizione numerica o geometrica per concludere che tale o talaltra grandezza è incommensurabile a un'altra. Ecco le parole utilizzate da Voltaire per riassumere la presenza dell'infinito alle origini stesse della matematica: «I primi geometri hanno capito [...] che il loro cammino, per quanto sicuro, seguiva il bordo di un abisso, e che le piccole verità incontestabili che scoprivano erano circondate dall'infinito. Per intravederlo, bastava pensare all'impossibilità di misurare la diagonale di un quadrato con il suo lato». Il legame tra irrazionalità e infinito è così forte da spingere talvolta il linguaggio comune a fare confusione, definendo «incommensurabile» una quantità considerata incredibilmente *grande* (in altri termini, «quasi infinita»), mentre l'incommensurabilità delle grandezze va associata, da un punto di vista etimologico, al concetto di irrazionalità, senza alcun riferimento a «lunghezze grandissime».

Va detto, tuttavia, che su un piano strettamente logico non vi è alcuna necessità di utilizzare una discesa «infinita» nella dimo-

strazione classica, nella misura in cui il numero di tappe è limitato da p. Da un punto di vista matematico, il termine «ricorrenza» è più preciso di «discesa»; anche se la ricorrenza fa spesso ricorso all'infinito, il legame non ha nulla di sistematico, e, se necessario, è tecnicamente possibile farne a meno.

Aggirare l'assurdo

In generale, da un punto di vista pedagogico, un ragionamento per assurdo come quello della dimostrazione classica dispone di un potere persuasivo limitato. Per capire il significato esatto e accettare la validità di un preambolo del tipo «Vi dimostrerò che $\sqrt{2}$ non può essere espresso in forma frazionaria. Poniamo $\sqrt{2} = p/q$, e poi...» occorre una certa consuetudine al ragionamento matematico. Tanto per cominciare, nello spazio di due frasi consecutive si afferma una cosa e il suo contrario. Secondo diversi autori (tra cui Árpád Szabó), data la difficoltà intrinseca di questo modo di ragionare è improbabile che sia stata la dimostrazione classica a far scoprire l'irrazionalità della radice di 2 (o, il che è lo stesso, l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato), nella misura in cui la sua stessa struttura ne fa un ragionamento che può essere sviluppato solo da chi è già al corrente del risultato finale.

Una volta superato l'ostacolo intellettuale che lo accompagna, il ragionamento per assurdo si rivela uno strumento prezioso, utilizzato regolarmente da tutti i matematici. Di fronte al suo impiego, però, c'è chi storce il naso, per varie ragioni. Una di queste ha a che fare con l'estetica matematica: ragionare per assurdo equivale, in un certo senso, a ragionare partendo dal falso, una cosa che si preferirebbe evitare – tanto più che alcuni ragionamenti per assurdo sono piuttosto oscuri, e la loro presentazione è, talvolta, poco elegante. Altre ragioni, di natura più profonda, riguardano la logica matematica e le regole implicite utilizzate per effettuare un ragionamento. Una di queste regole, ad esempio, è «se da A segue B e da B segue C, allora da A segue C» (è la «transitività dell'implicazione»). Ogni dimostrazione sfrutta, tutte o in parte, queste regole logiche, le quali, per quanto siano «evidenti», non sono dimostrate bensì ammesse. Senza queste basi non si va da nessuna parte.

Sarebbe impensabile, dunque, pretendere di farne a meno, ma solitamente si preferisce servirsene il meno possibile. I logici più esigenti su questo punto sono quelli della scuola «intuizionista», che ritroveremo più avanti: gli assiomi che riconoscono come validi sono così pochi che spesso è estremamente difficile dimostrare cose apparentemente «semplici» nei limiti dei vincoli imposti (in particolare, non sappiamo se si possa stabilire in modo intuizionista che $\sqrt{2}$ è irrazionale, o addirittura se $\sqrt{2}$ ha un senso).

Dove si colloca, nel panorama della logica matematica, la dimostrazione classica? Per scoprirlo, bisogna fare una distinzione tra due versioni differenti del ragionamento per assurdo. Quella utilizzata nella dimostrazione classica porta a conseguenze teoriche tutto sommato accettabili, e perciò è detta «minimale». Essa afferma che se, ragionando a partire da un'ipotesi H («$\sqrt{2}$ è razionale»), si arriva a un'assurdità («esistono due numeri pari senza divisori comuni»), allora l'ipotesi H è falsa (e dunque $\sqrt{2}$ è irrazionale). Persino la scuola intuizionista accetta questo assioma, e con esso la validità logica della dimostrazione classica. Ma allora sarebbe forse possibile farne a meno, così da ridurre l'arsenale logico utilizzato nella dimostrazione? Analogamente a quanto capita nel caso di molti ragionamenti per assurdo «abituali» (ma non sempre), la risposta è sì: se ne può modificare la formulazione in modo tale da trasformarla in un ragionamento che non è più «per assurdo», ma «per contrapposizione».

La regola di contrapposizione è la seguente: se l'affermazione P implica l'affermazione Q, allora la negazione dell'affermazione Q implica la negazione dell'affermazione P. Eccone un esempio semplice: «se trovo della posta nella mia buca delle lettere, allora sono il primo a tornare a casa» è logicamente equivalente a «se non sono il primo a tornare a casa, allora non troverò della posta nella buca delle lettere» (ma non è logicamente identica a «se non trovo posta nella buca delle lettere, allora non sono il primo a rientrare a casa», che costituisce un errore classico: in effetti, è possibile che quel giorno il postino non abbia portato nulla).

La regola del ragionamento per assurdo minimale implica quella del ragionamento per contrapposizione, ma il reciproco non vale: dal punto di vista logico, dunque, la contrapposizione è «più economica» del ragionamento per assurdo minimale. Riformulare l'u-

no mediante l'altra, quindi, vuol dire economia di mezzi. Tale economia può essere considerata elegante, ma, di fatto, la differenza tra le due dimostrazioni è a malapena visibile (lasciamo ai lettori più curiosi il compito di effettuare la riformulazione).

Dimostrare senza mostrare

La scuola intuizionista accetta la forma minimale del ragionamento per assurdo, rifiutandone invece quest'altra versione, apparentemente identica: «se, ragionando a partire dalla negazione di un'ipotesi *H*, si giunge a un'assurdità, allora l'ipotesi *H* è vera». È difficile indovinare dove stia la differenza tra questa forma di ragionamento per assurdo e la precedente: cosa cambierà mai il fatto di sostituire *H* con la negazione di *H*?

A rigore, ecco dove porta l'applicazione della forma minimale del ragionamento per assurdo alla negazione di *H*: se, ragionando a partire dalla negazione di *H*, si giunge a un'assurdità, allora la negazione di *H* è falsa. Viene assolutamente naturale, dunque, sostituire «la negazione di *H* è falsa» con «*H* è vera» per ritrovare così la nostra seconda forma di ragionamento per assurdo... ma l'occhio attento dei logici vede nell'operazione un cambiamento tutt'altro che innocente. La sostituzione, in effetti, presuppone che, tra l'ipotesi *H* e la sua negazione, una delle due sia necessariamente vera, il che equivale ad applicare il «principio del terzo escluso»: per qualsiasi affermazione *A*, o è vera *A* o lo è la sua negazione. I logici della scuola intuizionista cui accennavamo poco fa rifiutano l'impiego di tale principio e, di conseguenza la seconda forma di ragionamento per assurdo.

La critica principale mossa dagli intuizionisti al principio del terzo escluso è la sua apertura alle dimostrazioni «non costruttive». Se l'ipotesi *H* è che esista un certo oggetto che verifica una proprietà data («gli unicorni esistono»), allora supporre che *H* sia falsa e giungere a un'assurdità permette di concludere, attraverso la seconda forma di ragionamento per assurdo, che *H* è vera (e dunque che esistono degli unicorni), se non fosse per il fatto che il ragionamento suddetto non consente di produrre l'oggetto di cui *H* afferma l'esistenza. L'aver dimostrato che un oggetto esiste non

basta per trovarlo, mentre, in linea generale, l'intenzione profonda della dimostrazione di esistenza di un oggetto è quella di mostrarlo. La forma minimale del ragionamento per assurdo, dal canto suo, non presenta questo inconveniente, di cui si possono misurare le conseguenze grazie a un caso particolare del «settimo problema di Hilbert».

L'8 agosto 1900, a Parigi, in occasione del secondo congresso mondiale dei matematici, il grande matematico tedesco David Hilbert prende la parola per tenere quella che diventerà una delle conferenze più famose della storia della matematica. Hilbert presenta un elenco di problemi all'epoca ancora irrisolti, e considerati tra i più emblematici dello stato di quella disciplina. Hilbert fa centro: la risoluzione di questi problemi (oggi quasi tutti risolti) terrà occupati i più grandi matematici del XX secolo. Il settimo problema della lista consiste, in parole povere, nel chiarire la natura matematica di numeri come $2^{\sqrt{2}}$. Spieghiamo brevemente come si definisce un numero del genere: sappiamo già elevare 2 a una potenza intera (2^5, ad esempio, corrisponde al numero $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, cioè 32) o a una potenza frazionaria ($2^{3/2}$, ad esempio, è uguale a $(2^{1/2})^3$, ovvero $(\sqrt{2})^3$, o anche $2\sqrt{2}$); consideriamo dunque la successione dei numeri 2, $2^{1,4}$, $2^{1,41}$, $2^{1,414}$ ecc. (che corrispondono a potenze frazionarie di 2: 2^1, $2^{14/10}$, $2^{141/100}$, $2^{1414/1000}$ ...): si può dimostrare che, al tendere dell'esponente di 2 verso $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ ... tale successione tende a un valore limite, che, per definizione, non è altro che $2^{\sqrt{2}}$.

Come sapere se $2^{\sqrt{2}}$ è un numero irrazionale? È questa, in forma semplificata e ridotta, la domanda al centro del settimo problema di Hilbert. A volte si parla di $2^{\sqrt{2}}$ come della «costante di Gelfond-Schneider», in onore dei matematici Alexandr Gelfond e Theodor Schneider che agli inizi degli anni trenta vennero a capo del settimo problema di Hilbert, in maniera indipendente l'uno dall'altro.

Non ci soffermeremo sul teorema di Gelfond-Schneider, nel quale, tra le altre cose, si dimostra che $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale. Ci interesseremo, invece, a un problema analogo ma più semplice: dimostrare che esistono due numeri irrazionali x e y tali che x^y è razionale. La dimostrazione di questo risultato illustra in maniera particolarmente eclatante i problemi posti dal terzo escluso.

Per affrontare il problema, l'idea più semplice è di scegliere in maniera oculata due numeri irrazionali x e y tali da garantire che x^y sia razionale. Purtroppo non è una cosa facilmente realizzabile. Per trovare una via d'uscita, procederemo in un altro modo. Cominciamo ponendo $a = \sqrt{2}$ e $b = \sqrt{2}$ (indubbiamente irrazionali entrambi), e consideriamo il numero $c = b^a$. Delle due l'una: o c è razionale, o non lo è (stiamo utilizzando il principio del terzo escluso). Nel primo caso, il problema è risolto: abbiamo effettivamente due numeri irrazionali (che, nel caso particolare, sono anche uguali) tali che l'uno elevato all'altro corrisponde a un numero razionale. Se c è irrazionale, invece, passiamo a considerare il numero c^a. Si tratta indubbiamente di un numero di tipo «(irrazionale)$^{(\text{irrazionale})}$», e inoltre:

$$c^a = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

Dato che 2 è un numero razionale, quindi, abbiamo ottenuto che c^a è razionale.

La risposta alla nostra domanda, perciò, è la seguente: sì, esistono due numeri irrazionali tali che uno elevato alla potenza dell'altro sia razionale, dato che riusciamo a darne un esempio con a^b o con c^a. Però non sappiamo quale dei due è l'esempio buono! Tale è l'effetto, quantomeno curioso, dell'utilizzo del principio del terzo escluso: può affermare l'esistenza di un oggetto senza riuscire a mostrarcelo.

A proposito di questo grazioso ragionamento, osserviamo due cose. Da un lato, il ricorso alla radice quadrata di 2 non è obbligatorio, e il lettore può verificare che è possibile sostituirla senza problemi con la radice quadrata di qualsiasi altro intero pari. Dall'altro, l'autore di questo grande classico tra i problemi posti dal terzo escluso non sembra essere stato identificato con certezza (potrebbe trattarsi di Luitzen Brouwer, che visse nel XX secolo e fu il padre dell'intuizionismo, ma non ne abbiamo certezza).

A che serve sapere che gli unicorni esistono, se poi non possiamo vederli?, chiederebbe un intuizionista. Finché non ne vediamo uno, pretendere che esista non è sbagliato, o perlomeno inutile? Resta il fatto che rinunciare allo strumento rappresentato dal principio del terzo escluso costa caro, perché il teorema di Gelfond-

Schneider, in cui si fa vedere, tra le altre cose, che $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ e $2^{\sqrt{2}}$ sono entrambi irrazionali, dimostra cose tutt'altro che semplici.

Lo stesso Hilbert, in occasione di una conferenza tenuta nel 1920, aveva affermato che nessuno tra il pubblico sarebbe vissuto abbastanza da veder dimostrata l'irrazionalità di $2^{\sqrt{2}}$: dovettero passare solo pochi anni, tuttavia, perché Gelfond dimostrasse l'irrazionalità di un numero matematicamente simile (si tratta di $2^{\sqrt{-2}}$, un numero che non proveremo a definire in modo rigoroso). Prendendo spunto da questo risultato, il matematico Carl Siegel non tardò a dedurne che anche $2^{\sqrt{2}}$ è irrazionale, e tutto ciò con Hilbert ancora vivo e vegeto. La prospettiva è un'arte difficile, anche per gli spiriti più grandi...

6.

Il pari, il dispari e i ciottoli

«Supporre che la diagonale sia commensurabile equivale a confondere i numeri pari e quelli dispari». Aristotele scrive queste parole più di trecento anni prima dell'era cristiana, negli *Analitici primi* e in diverse altre occasioni. La dimostrazione classica dell'irrazionalità della radice quadrata di 2 è così radicata nelle consuetudini della matematica da far nascere spontaneamente l'idea che Aristotele si riferisca proprio a essa. In questo capitolo vedremo come ottenere l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ con altri metodi, anch'essi legati al concetto di pari e dispari ma che sfruttano, oltre all'aritmetica, i «numeri triangolari» dei pitagorici.

Essere più volte pari

I pitagorici sembrano essere stati i primi, più di cinque secoli prima della nostra era, a interessarsi in modo così preciso alla distinzione tra pari e dispari, e a definire varie categorie di numeri sulla base delle loro proprietà di divisibilità per 2; in particolare, un numero pari è «parimente pari» se è multiplo di 4. L'idea più generale è quella di studiare «quante volte è pari un numero dato». Ad esempio, il numero 30 lo è solo una volta: quando lo si divide per 2 si finisce su un numero dispari (15). Il numero 20 lo è due volte (lo si divide per 2, poi ancora per 2, e si ottiene il numero dispari 5), il numero 24 lo è tre volte, e via dicendo. In termini moderni, la nozione si incarna nella più grande potenza di 2 che divide un dato numero n. Esiste un valore massimo v tale che n sia divisibi-

le per 2^v ma non per 2^{v+1} (se n è dispari, allora $v = 0$); il valore v corrisponde a «quante volte è pari n», e ci consente di scrivere n nella forma $n = 2^v m$, dove m è un numero dispari. Negli esempi precedenti, si ha $30 = 2^1 \times 15$, $20 = 2^2 \times 5$ e $24 = 2^3 \times 3$.

Ecco una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che si basa su quanto abbiamo appena detto. Nel capitolo precedente abbiamo visto in che modo l'ipotesi della razionalità di $\sqrt{2}$ implichi l'esistenza di due numeri p e q tali che $p^2 = 2q^2$. Scriviamo il numero p nella forma $p = 2^j \times r$, dove r è dispari e dove j indica quante volte è pari il numero p. Elevando al quadrato, abbiamo $p^2 = 2^{2j} \times r^2$, cioè p^2 è pari un numero di volte uguale a $2j$. Analogamente, detto k il numero di volte che q è pari, sia $q = 2^k \times s$, dove s è dispari: se ne deduce che $q^2 = 2^{2k} \times s^2$, e quindi che $2q^2 = 2 \times (2^{2k} \times s^2) = 2^{2k+1} \times s^2$. Il numero di volte che $2q^2$ è pari, dunque, è uguale a $2k + 1$.

Facciamo un bilancio: se $\sqrt{2}$ è un numero razionale, allora esistono due interi p e q (non nulli) tali che $p^2 = 2q^2$. Il numero di volte che p^2 è pari, dunque, è uguale al numero di volte che $2q^2$ è pari. Ora, per quanto si è detto poco fa, il numero di volte che p^2 è pari è $2j$, mentre il numero di volte che $2q^2$ è pari è $2k + 1$: dunque deve essere $2j = 2k + 1$, e ciò non è possibile perché $2j$ è pari mentre $2k + 1$ è dispari. Non è escluso che, nel pronunciarsi sul pari e sul dispari, Aristotele pensasse a questa dimostrazione, e non a quella classica (con la quale è imparentata).

Il nome di chi ha immaginato questa dimostrazione (e lo stesso vale per buona parte delle altre) ci è ignoto. Contrariamente alla dimostrazione classica, non possiamo estenderla in maniera diretta per dimostrare l'irrazionalità di tutti i numeri del tipo $\sqrt{k}$ (dove k non è un quadrato perfetto). Ad esempio, il lettore potrà dimostrare che con la dimostrazione precedente non è possibile servirsi del numero di volte che un numero è pari per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{3}$.

I progressi dell'aritmetica dall'antichità ai giorni nostri, in un certo senso, hanno sfumato la distinzione tra numeri pari e numeri dispari, una separazione che, per quanto sia sempre pertinente e utile, si fonda ormai su considerazioni di ordine più generale. Ciò nonostante, il pari e il dispari non hanno ancora detto tutto: esiste ancora una dimostrazione che si fonda su questa distinzione, e che utilizza gli «atomi dell'aritmetica», i numeri primi.

Gli atomi dell'aritmetica

Divisibili solo per uno e per se stessi, i numeri primi permettono di dividere qualunque numero intero. Il «teorema fondamentale dell'aritmetica», comparso per la prima volta in una celebre opera del tedesco Carl Gauss, le *Disquisitiones Arithmeticae*, afferma che qualsiasi numero intero può essere scomposto in un prodotto di numeri primi, e che tale scomposizione è unica per ogni intero (per vederne una dimostrazione il lettore potrà consultare, ad esempio, il libro di Pierre Damphousse, *L'Arithmétique ou l'art de compter*, Le Pommier, Paris 2002). Ecco qualche esempio di scomposizione:

$6 = 2 \times 3 \quad 53 = 53$ (53 è primo) $\quad 19\,630\,026 = 2 \times 3^5 \times 13^2 \times 239.$

Quando si eleva al quadrato un numero, lo stesso capita alla sua scomposizione in fattori primi: ognuno dei suoi fattori viene elevato al quadrato. Si ha così:

$6^2 = 2^2 \times 3^2 \quad 53^2 = 53^2$ (non è primo!) $\quad 19\,630\,026^2 = 2^2 \times 3^{10} \times$
$\times\, 13^4 \times 239^2.$

In particolare, nella scomposizione di un numero come p^2 in prodotto di fattori primi, ognuno di questi è elevato a una potenza pari. Anche la somma degli esponenti che compaiono nella scomposizione di p^2, dunque, è un numero pari (in quanto somma di numeri pari), così come la somma degli esponenti della scomposizione di q^2. Quella di $2q^2$, invece, è necessariamente dispari (un numero pari per q^2, più uno per il 2). L'uguaglianza $p^2 = 2q^2$, quindi, è impossibile, anche stavolta perché «confonde il pari e il dispari».

Da un certo punto di vista, questa nuova dimostrazione complica la precedente, ma permette di dimostrare l'irrazionalità di altre radici quadrate, come $\sqrt{12}$ o $\sqrt{53}$. Non di tutte, però: $\sqrt{15}$, per citare solo l'esempio relativo al numero più piccolo, sfugge a entrambe le dimostrazioni, come potrà verificare il lettore.

È quantomeno strano che si sia dovuto aspettare l'inizio del XIX secolo per avere un'enunciazione esplicita del teorema fondamentale dell'aritmetica, visto che gli *Elementi* di Euclide contengono già una definizione e diversi risultati sui numeri primi. Il teorema fondamentale dell'aritmetica, tuttavia, era implicitamente cono-

sciuto e sfruttato ben prima di Gauss, il cui contributo a quel risultato è anzitutto quello di averlo identificato come fondamentale. Gauss, d'altra parte, è andato ben oltre; grazie alle sue ricerche, è stato possibile estendere il teorema ad altri casi, tra cui quello di un insieme noto come $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$ e dotato di proprietà aritmetiche assolutamente notevoli (si veda l'inserto).

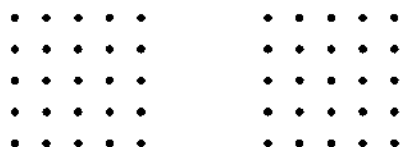
Un'aritmetica esotica Prendete i numeri interi e la radice quadrata di 2. Fate addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni: l'insieme dei numeri che potete ottenere viene indicato come $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. Si può dimostrare che ogni elemento di $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ può essere messo nella forma $(a + b\sqrt{2})/c$, dove a, b e c sono numeri interi qualsiasi (positivi o negativi, con c non nullo). Non lo faremo, ma vediamo comunque qual è la chiave della dimostrazione, vale a dire la nozione di «quantità coniugata». Per definizione, la quantità coniugata di $(a + b\sqrt{2})/c$ è $(a - b\sqrt{2})/c$. La proprietà importante è che il prodotto delle due quantità dà un numero razionale (pari a $(a^2 - 2b^2)/c^2$). Per ricondurre un'espressione come $1/(x + y\sqrt{2})$ alla forma $(a + b\sqrt{2})/c$, basta moltiplicare il numeratore e il denominatore per la quantità coniugata di $(x + y\sqrt{2})$, ottenendo così: $1/(x + y\sqrt{2}) = (x - y\sqrt{2})/[(x + y\sqrt{2})(x - y\sqrt{2})]$; il denominatore di quest'ultima espressione, dunque, è un numero razionale, e ciò consente di arrivare a un oggetto del tipo $(a + b\sqrt{2})/c$.
Proprio come l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali prolunga l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi (ne rappresenta il «corpo delle frazioni»), l'insieme $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ è un'estensione dell'insieme indicato con $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$ dei numeri del tipo $a + b\sqrt{2}$, dove a e b sono interi (cioè elementi di $\mathbf{Z}$). Se poi richiediamo che a e b siano interi positivi o nulli, otteniamo l'insieme $\mathbf{N}(\sqrt{2})$, che sta a $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$ come $\mathbf{N}$, insieme degli interi positivi o nulli, sta a $\mathbf{Z}$.
Partendo da un numero diverso da $\sqrt{2}$ si costruiscono altri insiemi. Se k è un intero diverso da un quadrato perfetto, l'insieme $\mathbf{Q}(\sqrt{k})$ è una «estensione quadratica di $\mathbf{Q}$». Tutte le estensioni quadratiche possiedono le proprietà precedenti di $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (le estensioni non quadratiche, come $\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2})$, sono più delicate da maneggiare perché la quantità coniugata non è così facile da definire). L'estensione $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, invece, si distingue per il suo sottoinsieme $\mathbf{N}(\sqrt{2})$, che possiede una struttura decisamente notevole. In $\mathbf{N}(\sqrt{2})$, in effetti, è

possibile scomporre qualsiasi elemento in maniera unica come prodotto di elementi «primi» di $\mathbf{N}(\sqrt{2})$ (non esprimibili come prodotto di altri elementi di $\mathbf{N}(\sqrt{2})$). In altre parole, il teorema fondamentale dell'aritmetica possiede un perfetto analogo in $\mathbf{N}(\sqrt{2})$. Ecco, ad esempio, come si scompongono alcuni elementi di $\mathbf{N}(\sqrt{2})$:

$$5 + 3\sqrt{2} = (1 + \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{2})$$

$$1 + 8\sqrt{2} = 1 + 8\sqrt{2} \text{ } (1 + 8\sqrt{2} \text{ è primo in } \mathbf{N}(\sqrt{2}))$$

$$2 = (\sqrt{2})^2$$

(Come si può vedere, il numero 2 non è primo in $\mathbf{N}(\sqrt{2})$; si può dimostrare facilmente, invece, che tutti gli altri numeri primi «classici» lo sono anche in $\mathbf{N}(\sqrt{2})$).
La proprietà precedente implica che l'insieme $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$ è un «anello fattoriale» (non entriamo nei dettagli del passaggio da $\mathbf{N}(\sqrt{2})$ a $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$). Tale insieme possiede addirittura una proprietà ancora più forte, quella di essere un «anello euclideo»: si tratta di un insieme in cui esiste un analogo della divisione euclidea classica tra numeri interi. La maggior parte dei risultati dell'aritmetica ordinaria sui numeri interi (gli elementi di $\mathbf{Z}$) ha il suo corrispettivo per i numeri del tipo $a + b\sqrt{2}$ (gli elementi di $\mathbf{Z}(\sqrt{2})$).
È curioso come questa ricchezza strutturale non si trovi affatto in tutti gli insiemi $\mathbf{Z}(\sqrt{k})$. Non tutti sono anelli fattoriali, ed è stato dimostrato da Harold Chatland e Harold Davenport, rispettivamente nel 1950 e nel 1951, che pochissime estensioni quadratiche danno origine ad anelli euclidei. I valori di k per cui ciò accade sono in quantità finita: 2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 17, 19, 21, 29, 33, 37, 41, 57 e 73. Gli altri insiemi $\mathbf{Z}(\sqrt{k})$ sono dotati di strutture più povere.

Il punto di vista dei ciottoli

Chiedersi quale sia il vantaggio di avere un corno in mezzo alla fronte per un animale che vive in una foresta o in montagna può rivestire un interesse di tipo intellettuale, ma si scontra con il fatto che gli unicorni non esistono. Se si «rifiuta» l'esistenza della radice quadrata di 2 (vedi cap. 4), dobbiamo forse temere che quanto si è detto finora sia, in fin dei conti, privo di senso? La risposta

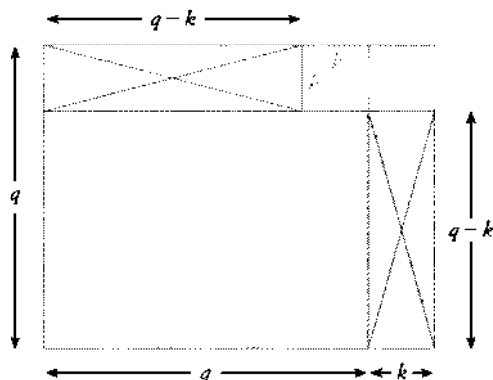
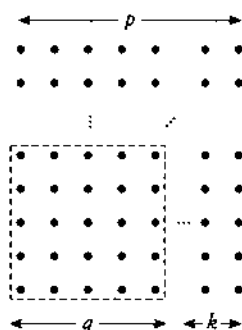
è no, come dimostra il problema seguente. Partiamo da due quadrati identici, formati da ciottoli.

Vogliamo sapere se sia possibile, raggruppando i ciottoli dei due quadrati, costruire un unico quadrato più grande che li utilizzi tutti. Nell'esempio precedente, in cui ogni quadrato è formato da 25 ciottoli, si vede subito che non è possibile: con 50 ciottoli possiamo formare un quadrato di 7 ciottoli per lato, utilizzando quindi $7^2 = 49$ ciottoli e lasciandone uno inutilizzato.

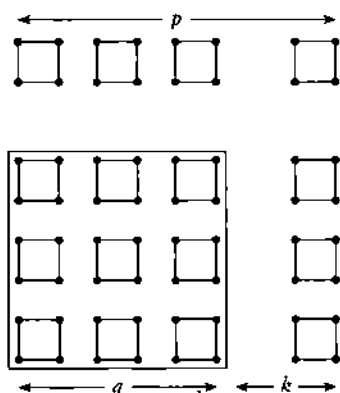
Indichiamo con q il numero di ciottoli che compongono il lato di uno dei due quadrati iniziali, e con p quello del lato del quadrato più grande da costruire con i ciottoli. Il numero totale di ciottoli è $2q^2$, e il problema consiste quindi nel trovare due interi p e q tali che $p^2 = 2q^2$. Dunque abbiamo tradotto il nostro problema di ciottoli in un'equazione «diofantea», ovvero un'equazione in cui tutte le incognite (p e q) sono numeri interi (una data quantità di ciottoli). È la stessa equazione di cui abbiamo dimostrato a più riprese, in questo capitolo e in quello precedente, che non ammette soluzioni.

Le regole usuali dell'algebra ci permettono di riscrivere la nostra equazione diofantea nella forma $(p/q)^2 = 2$, cioè $p/q = \sqrt{2}$: in altri termini, l'impossibilità di risolvere il nostro problema dei ciottoli equivale all'irrazionalità della radice quadrata di 2.

Quello che bisogna notare è che non siamo minimamente obbligati a effettuare tali trasformazioni sull'equazione iniziale, e dunque che non è necessario parlare della radice di 2 per far sì che tutti i ragionamenti che abbiamo fatto – dalla dimostrazione classica a quelle descritte poco fa, basate su «pari e dispari» – conservino tutta la loro validità e il loro interesse. Il contesto dei ciottoli ci consente di fermarci all'equazione diofantea, e di mostrare che non ammette soluzione. Di fatto, il punto di vista delle equazioni diofantee, in un certo senso, ci «dispensa» dalla costruzione di un oggetto denominato radice quadrata di 2.

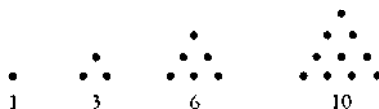
I ciottoli offrono anche il vantaggio di prestarsi a manipolazioni che conducono a ulteriori dimostrazioni dell'impossibilità di trovare due interi non nulli p e q tali che $p^2 = 2q^2$.

Ecco un primo modo di procedere: supponiamo che sia possibile disporre i ciottoli del secondo quadrato di lato q «a squadra» (vedi cap. 17) attorno al primo, così da costruire un quadrato più grande con un lato formato da p ciottoli. Definiamo k la larghezza della squadra: ciò equivale a dire che $q + k = p$.

L'idea è di dimostrare che questa configurazione di ciottoli è impossibile, e di dimostrare così (ragionamento per assurdo) che partendo da due quadrati di ciottoli non è possibile formarne uno solo (e dunque che $\sqrt{2}$ è irrazionale, da quanto abbiamo visto poco fa). Vediamo quindi come smascherare l'incoerenza insita nella figura precedente.

Nella figura, la squadra è formata dai q^2 ciottoli del secondo quadrato iniziale. Dividiamo la squadra in tre parti, così da poter scrivere: $kq + k^2 + kq = q^2$. Se ne deduce che $q^2 - k^2 = 2kq$, e che quindi $q^2 - k^2$ è un numero pari. Un'identità notevole classica (si veda la figura seguente per una dimostrazione), d'altra parte, indica che $q^2 - k^2 = (q + k)(q - k)$.

Non è difficile dimostrare che, per ogni valore di q e di k, i valori $q + k$ e $q - k$ sono entrambi pari o entrambi dispari. Restando sempre ai nostri ciottoli, infatti, si vede che il numero di ciottoli che separa $q + k$ da $q - k$ è uguale a $2k$; perciò, se $q - k$ è dispari, lo è anche $q + k$, e viceversa. Dato che $(q + k)(q - k)$ è un numero pari e che $q + k$ e $q - k$ hanno la stessa parità, $q + k$ e $q - k$ sono

Il rettangolo grigio contiene $(q+k)(q-k)$ ciottoli, ed è formato da due rettangoli più piccoli; quello di destra, indicato da una croce, contiene $k(q-k)$ ciottoli: spostandolo in modo da disporlo in orizzontale sopra l'altro rettangolo, si riempie il quadrato di lato q (formato da q^2 ciottoli), meno un piccolo quadrato di lato k (e dunque k^2 ciottoli) in alto a destra. Abbiamo perciò $(q+k)(q-k)=q^2-k^2$.

entrambi pari. Di conseguenza q e k hanno la stessa parità. Per proseguire, adesso, dobbiamo distinguere due casi.

Primo caso: q e k sono entrambi pari. In tal caso si possono raggruppare i ciottoli in quadratini di 4 ciottoli ciascuno, in modo tale che nessuno di essi si trovi a cavallo tra il quadrato di q^2 ciottoli e la squadra che lo fiancheggia (figura seguente).

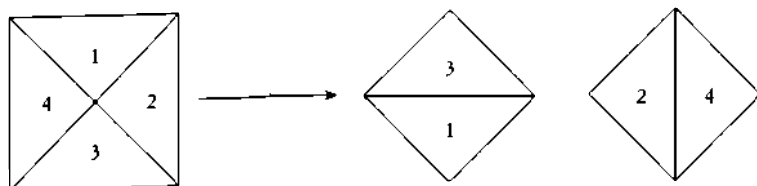
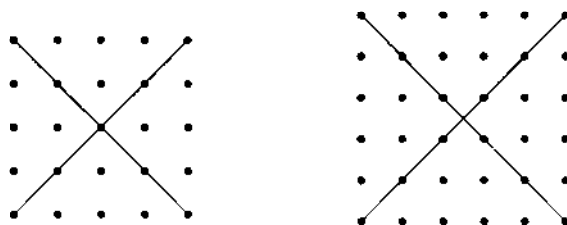
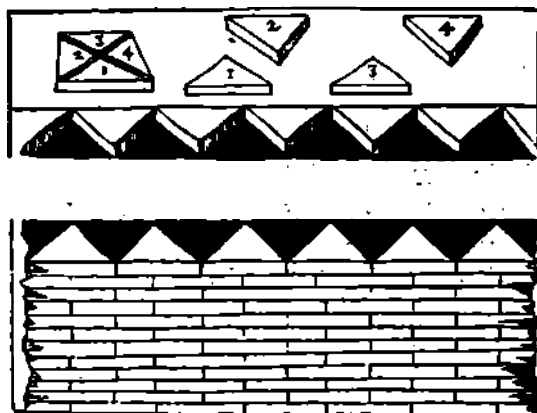
Adesso sostituiamo ogni quadratino di 4 ciottoli con un ciottolo solo: la figura risultante costituisce così una seconda soluzione al problema, ma con meno ciottoli. Se indichiamo rispettivamente

con q' e k' le quantità di ciottoli che nella nuova figura corrispondono ai numeri q e k con cui è iniziato il nostro ragionamento, allora possiamo seguire un'altra volta lo stesso metodo e arrivare nuovamente ai due casi distinti: q' e k' sono entrambi pari o entrambi dispari. Se sono entrambi pari, allora si possono raggruppare di nuovo i ciottoli in pacchetti di 4, e così via: dato che la cosa non può andare avanti all'infinito, si arriverà per forza al punto in cui i ciottoli sono in numero dispari (si tratta di un ragionamento per «discesa infinita» - si veda il capitolo precedente). In fine, arriviamo al secondo caso.

Secondo caso: q e k sono entrambi dispari. Il valore di p, somma di q e k, è un numero pari. La divisione del quadrato di p^2 ciottoli in due parti uguali, dunque, dà origine a due sottoinsiemi, ognuno dei quali contiene un numero pari di ciottoli (uguale a $p^2/2$), e tale numero deve essere uguale a q^2 (visto che siamo partiti dall'ipotesi che il quadrato di p^2 ciottoli corrisponda all'unione di due quadrati identici di lato q). Ora, essendo q dispari, il suo quadrato non può essere pari.

Con i numeri triangolari

Come nel caso di altre dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, ci sono vari modi per mascherare il ragionamento precedente e renderlo irriconoscibile. Si può avere l'impressione di servirsi di complicazioni o parafrasi superflue, ma lo studio delle diverse formulazioni di una stessa dimostrazione può rivelarsi utile. Alcune di queste consentono di dar vita a una particolare prospettiva sulla matematica, sia essa pedagogica o storica. Alcuni anni fa, seguendo quest'idea, il filosofo e storico delle scienze Jules Vuillemin ha cercato di spiegare l'interesse matematico dei pitagorici per i «numeri triangolari», cioè quei numeri che si ottengono sommando i primi numeri interi: 1, 3 ($= 1 + 2$), 6($= 1 + 2 + 3$), 10 ($= 1 + 2 + 3 + 4$) ecc.

Vuillemin ha proposto una dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2 basata sui numeri triangolari. Purtroppo la sua dimostrazione è sbagliata, ma l'idea di partenza è comunque interessante: partire da una nozione matematica di ispirazione pitagorica per cercare di immaginare una strada che conduca al fenomeno dell'incommensurabilità, che i pitagorici avevano indubbiamente scoperto. Ecco un metodo, apparentemente inedito, per dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ a partire dai numeri triangolari. Beninteso, non vi è alcuna pretesa di dare una ricostruzione storica fedele di quella che fu la prima dimostrazione.

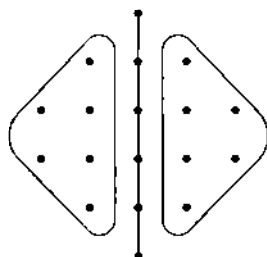
Partiamo dalla domanda seguente: dato un quadrato fatto di ciottoli, è possibile che questo derivi da due quadrati più piccoli? Se la risposta è sì, allora è possibile dividere l'insieme dei ciottoli del quadrato più grande in due insiemi più piccoli, i quali, opportunamente disposti, formano due quadrati di ciottoli più piccoli. Questa tecnica «inversa» di porre il problema è abbastanza naturale, nella misura in cui le due diagonali di un quadrato permettono facilmente di effettuare una simile divisione.

Prima di proseguire, è interessante notare come questo modo di suddividere un quadrato in quattro triangoli identici fosse utilizzato nell'antichità per la fabbricazione delle tegole, almeno da quel che racconta l'architetto italiano del XV secolo Leon Battista Alberti. Nel decimo capitolo del secondo libro dell'opera *De re aedificatoria*, Alberti spiega il suo particolare interesse per questo tipo di suddivisione con il fatto che, oltre all'economia che permette di realizzare nel decorare i lati di un muro, «parendo che nel muro non fosse mattone se non intero, collegati gli angoli a guisa di denti ne'ripieni, rendevano la muraglia fermissima» (pagina seguente).

Quando si ha a che fare con dei quadrati fatti di ciottoli, la suddivisione precedente deve essere definita con precisione, per sapere cosa fare dei ciottoli appartenenti alle due diagonali. Se indi-

«[Gli Antichi] facevano un mattone per ogni verso di un mezzo braccio [di lato] [...] e lo fendevano con due linee a traverso, da l'uno angolo opposito all'altro, insino al mezzo della sua grossezza, onde aveano quattro triangoli uguali» (Alberti, *De re aedificatoria*, II, 10). L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ implica che se i mattoni del muro sono lunghi quanti i lati corti dei triangoli è impossibile che la lunghezza del muro di mattoni sia uguale a quella ottenuta allineando i mattoni triangolari secondo il lato più lungo. Sarebbe decisamente esagerato, però, affermare che sia proprio questa l'origine dei dubbi sull'irrazionalità di $\sqrt{2}$! (© BNF)

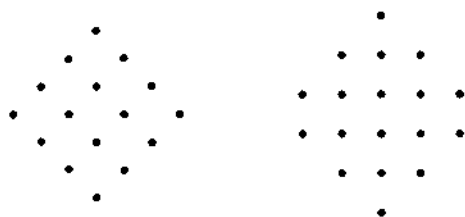
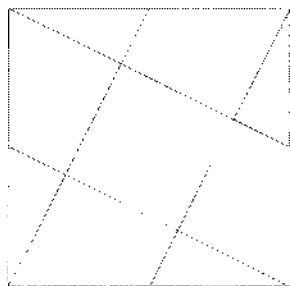
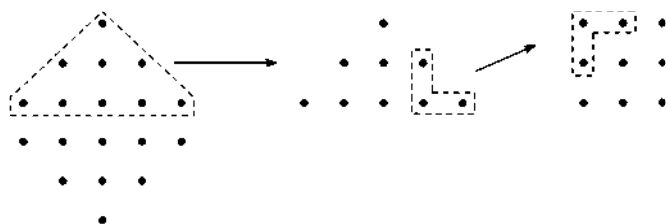
chiamo con n il numero di ciottoli sul lato del quadrato, si vede immediatamente che la parità di n gioca un ruolo nella forma presa dalla suddivisione.

Per formare le due parti uguali in cui vogliamo dividere i ciottoli del quadrato più grande, mettiamo in ognuna di esse due delle quattro porzioni triangolari identiche che compongono quel quadrato (notiamo fin d'ora come la forma di tali porzioni ricordi da vicino la struttura, descritta poco fa, dei numeri triangolari – vedre-

Quando n è dispari (fig. a sinistra), le diagonali hanno un ciottolo in comune, e il numero totali di ciottoli nelle diagonali è uguale a $2n - 1$; quando n è pari (fig. a destra), le diagonali non hanno ciottoli in comune, e la loro unione contiene $2n$ ciottoli.

mo in seguito quale sia il nesso). Non resta da fare altro che dividere equamente i ciottoli delle diagonali, ed è evidente che, nel caso della figura di sinistra, tale operazione è resa impossibile dal ciottolo che si trova all'intersezione tra le due diagonali.

Bisogna supporre, quindi, che all'incrocio delle diagonali non vi sia alcun ciottolo, e cioè che *n* sia pari. In tal caso, dalla suddivisione dei ciottoli si ottengono due insiemi, ognuno dei quali è l'unione di due porzioni triangolari e di una diagonale, che possiamo disporre come nella figura seguente:

Osservando la figura un po' troppo rapidamente, si potrebbe quasi pensare che siamo davvero riusciti a formare due quadrati più piccoli a partire da quello più grande, visto che la disposizione dei ciottoli assomiglia molto a un quadrato. In realtà la somiglianza è solo apparente: per avere un quadrato, infatti, ci vorrebbe un ciottolo, poi due, tre, e così via, mentre in questo caso ne abbiamo due, quattro, sei, eccetera.

Il problema, quindi, sta tutto nel sapere se esiste un altro modo di disporre i ciottoli del nostro quadrato apparente per ottenere un quadrato reale. A tal proposito, si può notare una cosa: il quadra-

Differenza tra un quadrato «reale» (a sinistra) e il nostro quadrato «apparente» (a destra); al passaggio da una linea all'altra, il numero di ciottoli aumenta di un'unità nel primo caso e di due nel secondo.

to apparente si divide in due parti uguali, e in ognuna di queste la disposizione dei ciottoli può essere modificata per ottenere un quadrato reale: per farlo, si divide ogni porzione in due parti, ognuna delle quali corrisponde esattamente a un numero triangolare.

Adesso, quindi, si tratta di sapere se sia possibile o meno, partendo da questi due quadrati reali più piccoli, costruirne uno più grande.

Ricapitoliamo: abbiamo cominciato con il chiederci se fosse possibile unire due quadrati di ciottoli in modo da formarne uno più grande, di lato n, e siamo tornati allo stesso interrogativo, ma con la metà dei ciottoli che avevamo all'inizio (la sola differenza è che nel primo caso siamo partiti dal quadrato unico ipoteticamente generato dai due più piccoli, mentre nel secondo caso siamo partiti dai due quadrati più piccoli a partire dai quali se ne vuole costruire uno più grande). Ricominciando di nuovo, e poi di nuovo ancora, si ottengono quadrati sempre più piccoli, indefinitamente, finendo per giungere a una contraddizione: dei quadrati composti di ciottoli, infatti, non possono diventare sempre più piccoli, senza che si arrivi mai a una fine (è un ragionamento del tipo «discesa infinita» – vedi cap. precedente). Per concludere, quindi, il problema non ha una soluzione: non è possibile formare un grande quadrato di ciottoli a partire da due quadrati più piccoli e identici, e dunque la radice quadrata di 2 è irrazionale.

È difficile immaginare un'estensione del ragionamento precedente che consenta di determinare l'irrazionalità di altre radici quadrate, oltre a quella di 2. In effetti, abbiamo sfruttato abbondantemente le proprietà della suddivisione di un quadrato mediante le sue diagonali, e in particolare quella che permette di fare due quadrati a partire da uno solo. Non è chiaro come si possa suddividere in maniera così «omogenea» un quadrato in 3, 7 o 11 quadrati

I quattro segmenti nel quadrato più grande congiungono i vertici ai lati, andando a intersecarli esattamente a metà della loro lunghezza. Riattaccando con la colla i due pezzi evidenziati in grigio, si forma un piccolo quadrato, identico al piccolo quadrato centrale inclinato. Facendo lo stesso con gli altri pezzi di quadrato, ci si ritrova infine con cinque piccoli quadrati identici tra di loro.

più piccoli. Esiste però una suddivisione sistematica di un quadrato che consente di formare cinque quadrati più piccoli e tutti identici tra di loro (si veda la figura in alto). Lasceremo al lettore il compito di verificare se è possibile, servendosi di quest'ultima procedura di suddivisione e con qualche modifica al ragionamento precedente, stabilire l'irrazionalità della radice quadrata di 5. Il lettore potrà anche interessarsi al caso in cui i quadrati di ciottoli diventano dei cubi.

7.

L'aritmetica modulare, ovvero come rendere $\sqrt{2}$ razionale

L'idea di pari e dispari non è affatto indispensabile per dimostrare l'irrazionalità della radice quadrata di 2, neanche quando si resta in un'ottica puramente aritmetica. I «numeri tondi» della nostra cara, vecchia base 10, in effetti, permettono di giungere alla medesima conclusione, evidenziando comunque alcune idee che, in determinati contesti, consentono di dire che «la radice quadrata di 2 è un numero razionale». Vi presenterò un'estensione di queste idee nel prossimo capitolo, che rappresenta un seguito logico di quello che state leggendo ora e nel quale introdurremo il concetto di «numero g-adico».

La cifra delle unità

Abbiamo già visto più volte che supporre la razionalità di $\sqrt{2}$ equivale ad affermare l'esistenza di due interi p e q non nulli tali che $p^2 = 2q^2$.

Scriviamo p e q in base dieci, ed esaminiamo le loro cifre delle unità. La cifra delle unità di un prodotto si ottiene dal prodotto delle cifre delle unità dei fattori: se u è la cifra delle unità di p, allora p^2 e u^2 hanno la stessa cifra delle unità. La cifra delle unità di p^2, dunque, figura tra le cifre delle unità dei numeri esprimibili nella forma u^2, dove u è un intero compreso tra 0 e 9. Analogamente, la cifra delle unità di $2q^2$ figura tra le cifre delle unità dei numeri di tipo $2v^2$, dove v è un intero compreso tra 0 e 9.

La tabella seguente contiene la lista delle cifre delle unità possibili per i numeri esprimibili nella forma u^2 e $2v^2$, al variare di u e v da 0 a 9.

u	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra delle unità di u^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
v	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cifra delle unità di $2v^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

L'uguaglianza tra i numeri p^2 e $2q^2$ impone che la cifra delle unità di p^2 sia uguale a quella di $2q^2$. Ciò impedisce, ad esempio, che la cifra delle unità di p (il numero u) sia uguale a 2, poiché qualunque sia la cifra delle unità (v) di q, la cifra delle unità di $2q^2$ non sarà mai uguale a $2^2 = 4$.

Osservando attentamente gli elementi della tabella precedente vediamo come la cifra delle unità di u^2 e quella di $2v^2$ siano uguali solo se $u = v = 0$, o se $u = 0$ e $v = 5$. La relazione $p^2 = 2q^2$, quindi, impone a p e a q di essere entrambi multipli di 5 (dal momento che la loro cifra delle unità è 0 o 5). La conclusione è analoga a quella della dimostrazione classica: o si è ipotizzato, all'inizio della dimostrazione, che p e q non avessero divisori comuni (incappando così in una contraddizione), o si intraprende una discesa infinita, sostituendo p e q rispettivamente con $p/5$ e $q/5$ e ricominciando indefinitamente, così da dare origine a un'infinità di numeri interi positivi sempre più piccoli, il che è assurdo. In entrambi i casi, l'ipotesi che $\sqrt{2}$ sia razionale sfocia in un'incoerenza.

Questa dimostrazione non funziona con qualsiasi base di numerazione. In particolare, se si effettua lo stesso ragionamento in base sette si arriva alla tabella seguente. Si può constatare come le possibilità di coincidenza delle «cifre delle unità» (in base sette) di p^2 e $2q^2$ siano numerose, senza garantire che p e q abbiano un divisore comune.

u	0	1	2	3	4	5	6
Cifra delle unità di u^2	0	1	4	2	2	4	1
v	0	1	2	3	4	5	6
Cifra delle unità di $2v^2$	0	2	1	4	4	1	2

Per quale ragione fondamentale la dimostrazione funziona in una base e non in un'altra? Per scoprirlo, conviene liberarsi per un po' di espressioni del tipo «cifra delle unità», e passare al linguaggio della «aritmetica modulare». Anche se nel contesto in cui ci muoveremo i due linguaggi sono fondamentalmente equivalenti, il secondo, più astratto, si rivela anche più pratico (il che ci tornerà utile, in particolar modo, nel prossimo capitolo).

Quando 9 + 1 *fa* 0

La dimostrazione precedente in base 10 può essere riformulata attraverso il formalismo delle «congruenze modulo 10», che semplifica le notazioni e fa vedere un altro modo di lavorare con i numeri.

Nell'aritmetica modulo 10, esistono solo i numeri interi compresi tra 0 e 9: su di essi, le operazioni di addizione, di sottrazione e di moltiplicazione assumono un senso leggermente diverso da quello della solita aritmetica. Nell'aritmetica modulo 10, si «taglia la testa» a tutti i numeri che superano il valore 9. Ad esempio, l'operazione 8 + 4, il cui risultato nell'aritmetica abituale è 12, nell'aritmetica modulo 10 dà 2: resta solo la cifra delle unità. La tabella seguente illustra qualche altro esempio.

Operazione	Risultato (aritmetica classica)	Risultato (aritmetica modulo 10)
$9 + 7$	16	6
$2 + 3$	5	5
4×8	32	2
$5 - 8$	-3	7

Per quel che riguarda l'ultima linea, il passaggio da -3 a 7 si spiega con il fatto che «sopprimere ciò che supera» vuol dire, in termini più matematici, aggiungere o togliere 10 al numero in esame un numero di volte sufficiente per ottenere un valore compreso tra 0 e 9. Nell'aritmetica modulo 10, dunque, non ci sono differenze tra i numeri -23, -13, -3, 7, 17, 27, eccetera. Si dice che «il numero 27, modulo 10, è uguale a 7», così come, d'altra parte, il resto della divisione di 27 per 10 è uguale a 7 (o, in altri termini, $27 = 2 \times 10 + 7$).

Non è difficile (per quanto un po' fastidioso) verificare che tutte le proprietà classiche, come la commutatività dell'addizione (il fatto che $8 + 6 = 6 + 8$), la commutatività della moltiplicazione ($6 \times 8 = 8 \times 6$), la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione ($3 \times (6 + 2) = (3 \times 6) + (3 \times 2)$), e così via, valgono tanto nell'aritmetica classica quanto in quella modulo 10. È così che, al di là di qualche uguaglianza leggermente sorprendente come $5 \times 2 = 0$ o $9 \times 9 = 1$, le abitudini ereditate dalle regole di calcolo classiche restano valide anche in modulo 10. L'insieme dei numeri interi compresi tra 0 e 9 munito di tali regole operative è detto $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

Naturalmente, quanto detto finora vale anche per un'aritmetica modulo un altro numero: l'orologio ci mostra ogni giorno un esempio di aritmetica modulo 12 (dopo le 12 si ricomincia con l'una), mentre l'orologio digitale illustra l'aritmetica modulo 24 e i giorni della settimana quella modulo 7. Gli insiemi dei numeri corrispondenti si indicano, rispettivamente, con $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. Il famoso «baco dell'anno 2000», che seminò il panico tra gli informatici alla fine del XX secolo, non era altro, matematicamente parlando, che un problema dovuto al fatto che alcuni computer contavano gli anni modulo 100, fissando cioè $99 + 1 = 100$ (così all'anno 1999 rischiava di seguire il 1900).

La cifra più a destra Nel primo capitolo abbiamo visto come si fa a stabilire che la rappresentazione decimale della radice quadrata di 2 non ha fine: ricordiamo rapidamente come si consideri la cifra più a destra, m, di un eventuale numero decimale x uguale alla radice quadrata di 2. L'ultima cifra di x^2 è la stessa di m^2, e quest'ultima non può essere uguale a zero perché, come si verifica facilmente, il quadrato di un numero intero compreso tra 1 e 9 non finisce mai per 0, il che ci porta alla contraddizione che cercavamo.

Questo ragionamento semplicissimo, molto più accessibile della dimostrazione classica del capitolo 5, stabilisce che la radice quadrata di 2 non può essere espressa nella forma di una frazione avente come denominatore una potenza di 10. Si tratta, cioè, di un risultato più debole dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, poiché le uniche frazioni precluse sono quelle del tipo $p/10^n$. Diventa naturale chiedersi, dun-

que, come estendere il ragionamento in modo tale da vietare a $\sqrt{2}$ anche altri tipi di frazione, per non dire tutti, e dimostrarne così il carattere irrazionale. Da questo prolungamento si ottiene una dimostrazione apparentemente inedita dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$. Si tratta di una procedura che ha il difetto di essere lunga, e dunque ci limiteremo a illustrarne gli elementi principali (la loro lettura, comunque, non è indispensabile per la comprensione del resto del capitolo).

L'idea di fondo è questa: se $\sqrt{2}$ è razionale, allora esistono due interi p e q tali che $\sqrt{2} = p/q$. In modo particolare, in base q la radice quadrata di 2 si scrive con una quantità finita di cifre dopo la virgola (per q uguale a 10, ad esempio, una frazione come 23/10 corrisponde all'espressione 2,3 espressa in base 10). Se, invece, si dimostra che la radice quadrata di 2 non può essere espressa con un numero finito di cifre qualunque sia la base di numerazione, allora avremo dimostrato che si tratta di un numero irrazionale.

Nel ragionamento esposto nel primo capitolo, e che abbiamo ripreso poco fa, la sostituzione della base dieci con un'altra non cambia nulla, a parte l'ultima tappa. Quest'ultima, in base 10, consiste nel verificare che il quadrato di un numero m compreso tra 1 e 9 non avrà mai una cifra delle unità uguale a zero. In base b, si tratta di assicurarsi che nessun numero intero m compreso tra 1 e $b - 1$, se elevato al quadrato, dia un numero la cui ultima cifra (in base b) vale zero. Purtroppo, per alcuni valori di b un simile valore di m esiste. In base quattro, ad esempio, prendere $m = 2$ dà $m^2 = 10$ (che, se scritto in base quattro, equivale a dire che $m^2 = 1 \times 4 + 0 \times 1$, cioè quattro).

Cominciamo dalla ricerca delle basi b in cui il problema non si pone, ovvero quelle basi per le quali, qualunque sia l'intero m compreso tra 1 e $b - 1$, m^2 non finisce per zero quando lo si scrive in base b. Osserviamo in primo luogo che se la cifra delle unità di m^2 in base b è 0, allora m^2 è divisibile per b (analogamente a quanto capita nel caso della base 10, dove i multipli di dieci sono proprio quei numeri che, espressi in forma decimale, finiscono per 0).

Supponiamo anzitutto che b sia un numero primo. Dato che m è compreso tra 1 e $b - 1$, m e b non hanno alcun divisore in comune, così come m^2 e b; m^2, quindi, non è divisibile per b, e l'ultima cifra della sua espressione in base b non è uno zero: perciò la parte finale del ragionamento che avevamo seguito per dimostrare che l'e-

spressione decimale di $\sqrt{2}$ ha un'infinità di cifre è sempre valida. La sua validità si estende al caso più generale in cui b è «quadratfrei». Il termine, di origine tedesca, indica i numeri che non sono divisibili per il quadrato di un numero intero: così, i numeri 10, 22, 30 e 7 sono quadratfrei, mentre 18 (divisibile per 3^2) e 48 (divisibile per 4^2) non lo sono. Si può dimostrare che un numero b è quadratfrei se, e solo se, la sua scomposizione in fattori primi contiene solo numeri primi distinti, tutti elevati alla potenza 1 (in particolare, ogni numero primo è quadratfrei). Così, se b è quadratfrei, nessun numero m minore di b possiede, nella sua scomposizione in fattori primi, *tutti* i divisori primi di b (altrimenti sarebbe multiplo di b, e dunque almeno uguale a b). Dato che neanche il suo quadrato li possiede, m^2 non è divisibile per b, e perciò l'ultima cifra di m^2 in base b è diversa da 0: il ragionamento del primo capitolo nel caso in cui $b = 10$ funziona quindi per qualunque base quadratfrei.

Per trattare il caso delle basi b non quadratfrei, prendiamo come filo conduttore il caso della base sessanta dei Babilonesi (60 è divisibile per 2^2). Il valore $m = 30$ è tale che, in base sessanta, $m^2 = 15{,}0$, ovvero, conformemente alla notazione del primo capitolo, $m^2 = 15 \times \times 60 + 0 \times 1$ (cioè 900, in base 10). In base sessanta, dunque, quando $m = 30$ il ragionamento precedente non funziona (si può verificare che questo è l'unico valore che dà problemi). La soluzione, allora, consiste nel considerare la penultima cifra (ovviamente in base sessanta, adesso come nel seguito).

Indichiamo con x un ipotetico numero il cui quadrato vale 2 e dotato di una quantità finita di cifre dopo la virgola. Sia m' la penultima cifra di x. Come l'ultima cifra di x^2 è uguale all'ultima cifra di m^2, così le due ultime cifre di x^2 corrispondono a quelle del quadrato di m', 30 (in notazione sessagesimale), cioè $(60m' + 30)^2$. I calcoli mostrano che l'ultima cifra di questa espressione è sempre uno 0, e che la penultima è sempre un 15. Il numero x^2, pertanto, non può essere uguale a 2, proprio a causa della presenza del 15.

Il caso della base sessanta si adatta a qualunque altra base del tipo u^2v, dove u e v sono quadratfrei: per una base del genere, gli unici numeri «problematici» sono quelli la cui ultima cifra m è esprimibile nella forma kuv, dove k è un intero strettamente minore di u (per $b = 60 = 2^2 \times 15$, l'unico possibile valore di k è 1, per cui $m = 1 \times 2 \times \times 15 = 30$). I calcoli mostrano che, in questo caso, la penultima cifra

di x^2 in base b è uguale all'ultima cifra dell'espressione $v(u \cdot 2m'k + k^2)$ (dove m' è la penultima cifra di x in base b). Affinché tale cifra sia 0, bisogna che $(u \cdot 2m'k + k^2)$ sia multiplo di u (la condizione è necessaria, ma non sufficiente), e dunque che k^2 sia multiplo di u, il che è impossibile perché k è minore di u e u è quadratfrei (si ripete il ragionamento seguito nel caso in cui b era quadratfrei).
Il caso generale di una base b assolutamente generica si tratta descrivendo b come un prodotto di numeri del tipo u_i^{2i}, con gli u_i quadratfrei: fattorizzando un numero dopo l'altro (o servendosi di un ragionamento ricorsivo) si riesce, non senza qualche difficoltà tecnica, a trovare una cifra dell'espressione di x^2 in base b diversa da 0 e da 2. Se ne deduce che $\sqrt{2}$ ha un'infinità di cifre in qualunque base b, e quindi che si tratta di un numero irrazionale.

Qual è l'utilità di tutto ciò per la dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2? Per saperlo, dobbiamo far ricorso a un principio matematico generale, dalle conseguenze fondamentali (la dimostrazione che ne daremo è intenzionalmente vaga, ma è possibile esprimerlo in maniera rigorosa, come un vero e proprio teorema): se una relazione è valida nell'aritmetica ordinaria, allora è valida anche modulo n, per n qualunque. Un'applicazione semplice di questa idea è alla base di criteri di esattezza del calcolo come la «prova del nove».

Il criterio indiscutibilmente più semplice per sapere se in un calcolo manuale è stato commesso un errore consiste nell'esaminare l'ultima cifra: per verificare che 374×197 è effettivamente uguale a 73 678, ad esempio, effettuiamo il prodotto dell'ultima cifra di 374 e dell'ultima cifra di 197: il numero che otteniamo è $4 \times 7 = 28$, e il fatto che la cui ultima cifra sia uguale a quella di 72 678 ci dà fiducia sull'esattezza del calcolo. Non abbiamo fatto altro che applicare il principio enunciato poco fa al caso in cui $n = 10$. Dato che 374, 197 e 73 678 corrispondono, rispettivamente, a 4, 7 e 8, si tratta di verificare la validità modulo 10 dell'uguaglianza $4 \times 7 = 8$: è la «prova del 10».

Il principio della «prova del nove» è esattamente lo stesso, con l'unica differenza che questa volta, come indica il suo stesso nome, il teorema va applicato con $n = 9$. L'interesse del procedimento sta

anzitutto nel fatto che per dei numeri scritti in base dieci è facile determinare i rispettivi corrispondenti in base 9: basta fare la somma delle cifre. Modulo 9, quindi, valgono le relazioni seguenti: $374 = 3 + 7 + 4 = 14 = 1 + 4 = 5$; analogamente, $197 = 1 + 9 + 7 = 17 = 1 + 7 = 8$ e $73\,678 = 7 + 3 + 6 + 7 + 8 = 31 = 3 + 1 = 4$: la prova del nove consiste dunque nel verificare che $5 \times 8 = 4$, un'uguaglianza che naturalmente va presa sempre modulo 9. Un altro aspetto interessante della prova del nove è che, mentre una prova come quella del dieci tiene conto esclusivamente delle cifre delle unità, quella del nove considera – attraverso la loro somma – tutte le cifre utilizzate nel calcolo.

Nell'espressione «prova del nove», il senso del termine «prova» non è quello di dimostrazione, bensì di «condizione necessaria»: affinché l'uguaglianza $371 \times 197 = 73\,678$ sia esatta, *è necessario* che passi il test della prova del nove, ma non è *sufficiente*. Il lettore potrà verificare, ad esempio, che l'uguaglianza $374 \times 197 = 400$, palesemente sbagliata, supera altrettanto bene la prova del nove: quest'ultima non permette di convalidare un calcolo, ma solo, tutt'al più, di corroborarlo. Sebbene la diffusione delle calcolatrici l'abbia resa desueta, la prova del nove è ancora alla base di alcuni sistemi per il controllo degli errori, come la «chiave» del codice INSEE in vigore in Francia.

Come ridurre a dieci un'infinità di casi

L'interesse dell'aritmetica modulare, nel nostro caso, è che consente di «ricondurre l'infinito al finito». In effetti, dimostrare che non esiste una coppia di interi p e q (non nulli) tali che $p^2 = 2q^2$ fa pensare *a priori* che si debba esaminare ogni coppia di interi, e quindi che si debba effettuare un'infinità di verifiche, il che, beninteso, non è possibile. Ora, secondo il principio generale enunciato poco fa, se esistono due interi p e q tali che $p^2 = 2q^2$, la relazione $p^2 = 2q^2$ è valida anche modulo 10 (e, più generalmente, modulo qualsiasi numero n). Perciò, se siamo in grado di dimostrare che non esistono interi p e q tali che $p^2 = 2q^2$ modulo 10, allora possiamo dedurne che l'uguaglianza $p^2 = 2q^2$ non ha soluzioni neanche nell'aritmetica ordinaria. L'idea è analoga a quella della

prova del nove, dove se l'uguaglianza $374 \times 197 = 73\,678$ è falsa modulo 9, allora è falsa e basta. Ora, lo studio di $p^2 = 2q^2$ modulo 10 richiede unicamente l'analisi di un numero finito di casi, dato che l'insieme $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ possiede solo dieci elementi. La verifica corrisponde esattamente alla prima tabella di questo capitolo, che, reinterpretata con il vocabolario dell'aritmetica modulare, rappresenta il calcolo di p^2 e di $2q^2$ modulo 10 per tutti gli elementi di $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$.

Se la verifica dimostrasse effettivamente che l'equazione $p^2 = 2q^2$ non ha soluzione modulo 10, allora la nostra dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ sarebbe completa. Sfortunatamente, la tabella ci dice che l'equazione possiede delle soluzioni modulo 10, vale a dire $p = q = 0$ e $p = 0$ con $q = 5$: quindi ci serve un argomento supplementare. Ci viene in aiuto l'osservazione seguente: in entrambi i casi ($p = q = 0$, $p = 0$ e $q = 5$, modulo 10), p e q sono multipli di 5. Il ragionamento si conclude così con una discesa infinita.

Il caso della base sette, dal canto suo, illustra i limiti del metodo che si basa sul principio generale menzionato in precedenza. Così come la prova del nove non è in grado di invalidare l'espressione $374 \times 197 = 400$, l'analisi della relazione $p^2 = 2q^2$ modulo 7 non permette di rendersi conto dell'inesistenza di una soluzione a $p^2 = 2q^2$ in aritmetica ordinaria, come mostra la corrispondente tabella all'inizio di questo capitolo. Il passaggio a modulo n riduce indubbiamente il numero di casi da trattare, ma anche il nostro campo visivo.

Sono molti i settori di ricerca in cui si pone il problema di sapere come «risalire» ai risultati sugli interi ordinari partendo da quelli in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Lo ritroviamo, tra gli altri, nella congettura di Birch e Swinnerton-Dyer, di cui non potremo occuparci ma che rappresenta uno dei «sette problemi del millennio» e per il quale il Clay Mathematics Institute ha messo in palio un milione di dollari.

E $\sqrt{2}$ diventa razionale...

La dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che funziona quando si opera in $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$ funziona nello stesso modo se si utilizza $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Il lettore, del resto, potrà verificare che in tal caso la dimostrazione non è altro che un ragionamento «pari e dispari», analogo a

quello del capitolo 6. L'impossibilità di condurre a buon fine la dimostrazione servendosi di **Z**/7**Z**, invece, porta naturalmente a chiedersi: quali sono i numeri interi *n* per cui funziona il ricorso a **Z**/*n***Z**?

La tabella in cui si illustra il caso della base sette mostra due relazioni interessanti: $3^2 = 2$ modulo 7 e $4^2 = 2$ modulo 7. Finché ci si limita a considerare l'aritmetica modulare come un sottoprodotto di quella ordinaria, in queste relazioni non sembra esserci nulla di particolare. Adesso cerchiamo di prendere le distanze, e analizziamo gli insiemi **Z**/n**Z** per ciò che sono: strutture numeriche altrettanto coerenti di quelle che ci sembrano più abituali. Al loro interno, la nozione di elevazione al quadrato ha un senso, e dunque anche quella di radice quadrata: una «radice quadrata» di un elemento *a* di **Z**/*n***Z** non è altro che un elemento *b* di **Z**/*n***Z** tale che $b^2 = a$ modulo *n*. Quindi in **Z**/7**Z**, per esempio, 3 è una radice quadrata di 2, dato che $3^2 = 2$ modulo 7.

Ecco come diventa razionale la radice quadrata di 2!

Certo, siamo di fronte a un cambiamento di significato notevole, perché la «radice quadrata di 2» in questione non è la stessa che abbiamo considerato finora. In gioco, qui, c'è il senso della definizione del «numero che, moltiplicato per se stesso, dà 2», definizione che dipende in maniera cruciale da ciò che chiamiamo «numero». Anche se, in generale, si riserva questa definizione ai numeri che chiamiamo «reali» (quelli con cui siamo abituati a lavorare, e che definiscono il contesto principale del libro), un'analisi più precisa mostra che vi possono aspirare anche altri oggetti matematici, e gli elementi di **Z**/7**Z** ne sono un esempio: anche loro, in effetti, si sommano, si sottraggono, si moltiplicano e si dividono per due... e anche loro possono avere delle «radici quadrate», come 2 nel caso di **Z**/7**Z** (ma il «2» di cui stiamo parlando in questo caso, comunque, non è quello dei numeri reali).

Per esprimere il fatto che 2 (ad esempio) possiede una radice quadrata in **Z**/*n***Z**, si preferisce indicarlo come «residuo quadratico modulo *n*». Grazie a quanto si è detto finora, si può dimostrare che i numeri *n* per i quali l'aritmetica modulo *n* non consente di stabilire che la «vera» radice quadrata di 2 è irrazionale sono esattamente quelli per cui 2 è un residuo quadratico modulo *n*. Nel nostro caso è questo il legame principale tra i vari concetti di «2» che stiamo presentando (quello di 2 come numero reale e quello di 2 come elemento di **Z**/*n***Z**).

Quand'è che 2 è un quadrato?

Il modo più semplice per determinare quali sono i valori di n per cui 2 è un residuo quadratico modulo n è di cominciare con gli interi primi (cioè che hanno come unici divisori se stessi e l'unità). Per loro vale il risultato seguente, che prendiamo per buono e che è dovuto principalmente a Gauss: sia p un numero primo (diverso da 2). Indichiamo con r il resto della sua divisione per 8. *A priori*, r potrebbe essere un intero qualunque tra 0 e 7, ma dal momento che p è primo r non può essere uguale a 0, 2, 4 o 6 (altrimenti p sarebbe pari, e dunque non primo – il valore $p = 2$ si studia a parte). Il resto r, quindi, può valere 1, 3, 5 o 7. Il risultato generale è che 2 è un residuo quadratico modulo p (dove p è primo) se, e solo se, r vale 1 o 7. I valori 7, 17, 41 e 97 sono esempi di numeri primi per cui r vale 1; si ha $r = 7$ prendendo $p = 23$, 31, 47 o 71.

Nel caso in cui il numero n è il prodotto di due numeri p e q, poi, se 2 è un residuo quadratico in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, allora lo è anche in $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$: in effetti, se x è una «radice quadrata di 2 in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$», allora esiste un intero k tale che $x^2 = 2 + kn$, che può anche essere riscritto come $x^2 = 2 + (kp)q$, da cui deriva che $x^2 = 2$ modulo q (la stessa cosa vale per p). Grazie a questa osservazione si può dimostrare che 2 non è un residuo quadratico modulo 35 (poiché $35 = 5 \times 7$, 5 è primo e la divisione euclidea di 5 per 8 non ha resto 1 né 7 – ma semplicemente 5). Più generalmente, affinché 2 sia un residuo quadratico modulo n, occorre che lo sia modulo qualsiasi divisore di n. Se ne può dedurre, ad esempio, che dal momento che 2 non ammette radici quadrate in $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ (la verifica è immediata), non ne ammette neanche in $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}$ (visto che 12 è un multiplo di 4).

Il criterio permette di eliminare certi valori di n, ma non ci dice se 2 è un residuo quadratico negli altri casi. Si può dimostrare (servendosi del «teorema cinese dei resti») che in effetti è proprio quello che capita. Integrando l'analisi separata del caso $n = 2$ con quella dei casi che ne derivano ($n = 4$, e così via), si giunge infine al risultato seguente: i numeri n tali che 2 è un residuo quadratico modulo n sono, per la precisione, quelli che verificano le due condizioni seguenti:

– n non è multiplo di 4;

– tutti i divisori primi (diversi da 2) di n ammettono 1 o 7 come resto della loro divisione per 8.

I valori 2, 7, 14, 17, 23, 31, 34, 41, 46, 47, 49... formano l'inizio della lista degli interi n tali che, ponendosi in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, diventa lecito affermare che – sempre con il cambiamento di significato visto poco fa – 2 ammette una radice quadrata intera.

8.

Quando le cifre sfuggono a sinistra

Quando scriviamo il numero $\sqrt{2}$ nella forma 1,414213562..., i puntini di sospensione stanno a indicare la presenza di un'infinità di cifre decimali. In termini matematici, per riprendere uno dei punti di vista descritti nel corso del capitolo 3, un'espressione come 1,414213562... può essere interpretata come il limite della successione di numeri decimali 1 – 1,4 – 1,41 – 1,414, ecc. I numeri decimali, quindi, servono da trampolino: con un'infinità di cifre a destra si ottengono tutti i numeri cosiddetti «reali», il cui insieme viene indicato con la lettera **R**.

Nel 1897, Kurt Hensel propose un altro modo di passare al limite, che consiste sempre nell'aggiungere ai numeri decimali un numero di cifre crescente, anche in questo caso «fino all'infinito», ma stavolta dal lato sinistro anziché dal destro. Così facendo, Hensel diede origine a dei numeri bizzarri, ma al tempo stesso vicini a quelli a noi già noti: i numeri «10-adici», o, più generalmente, «*g*-adici», dove *g* è la base di numerazione (se questa corrisponde a un numero primo, si parla piuttosto di *p*-adici, ma si tratta di un caso specifico di cui non ci interesseremo). In questo nuovo universo di numeri, la radice quadrata di 2 ha uno statuto e una forma ben diversi da quelli cui siamo abituati.

Nuovi universi di numeri

Così come non è possibile elencare la totalità delle cifre di un numero reale in forma decimale, è anche impossibile, in generale,

dare tutte le «cifre» costitutive di un numero 10-adico. Quando scriviamo un numero del genere, i puntini di sospensione tradiscono la nostra ignoranza delle cifre che «precedono», come nel caso ...58697,63487.

Gli unici numeri 10-adici di cui è possibile dare l'espressione completa sono quelli per i quali la successione delle cifre segue una regola identificabile, come ...8888821,19 (un'infinità di 8). Tra di loro si trovano quelli che a partire da un certo punto presentano solo degli 0, come ...0000465,11, che corrisponde al decimale 465,11 (e che ne è in tutto e per tutto equivalente, proprio come, nei numeri ordinari, si può scrivere 0,352 al posto di 0,352000...). A proposito di questi problemi di notazione, ricordiamo ancora che, nelle opere specialistiche, i numeri g-adici sono scritti «al contrario», per ragioni di natura teorica: 15,092759328... e non ...823957290,51. Noi seguiremo la notazione verso sinistra, che d'altra parte è quella originale di Hensel.

Le operazioni sui numeri 10-adici (e, più in generale, g-adici) si effettuano in maniera estremamente semplice, poiché non fanno altro che estendere nel modo più «logico» possibile le operazioni ordinarie sui numeri decimali. Per sommare due numeri 10-adici, ad esempio, si fa esattamente come per due interi. L'unica differenza di un certo rilievo è che si ha a che fare con un'infinità di cifre. A parte questo dettaglio, per l'addizione tra numeri 10-adici il metodo imparato a scuola, con il sistema dei riporti, resta invariato. Eccone un esempio:

$$\begin{array}{lr}
 & {\scriptstyle 1\ 1} \\
 & 1\ 3\ 2\ 8\ 3 \\
+ & \\
 & \ldots\quad 3\ 4\ 7\ 4\ 2 \\
\hline
= & 4\ 8\ 0\ 2\ 5
\end{array}$$

Anche la moltiplicazione tra numeri 10-adici è un'estensione del tutto naturale della moltiplicazione tra numeri decimali. Incolonnate i due numeri 10-adici che volete moltiplicare e procedete come vi hanno insegnato a scuola, proprio come se aveste a che fare con due numeri ordinari: ecco, sapete moltiplicare due numeri 10-adici. Un esempio:

					1	3	2	8	3
×									
		…			3	4	7	4	2
					2	6	5	6	6
				5	3	1	3	2	
			9	2	9	8	1		
		5	3	1	3	2			
	1	9	8	4	9				
⋰		⋮		⋮					
=					7	7	9	8	6

È chiaro che la «cifra delle unità» del risultato dipende esclusivamente da quella del moltiplicatore e del moltiplicando; analogamente, quella delle «decine» dipende solo dalle cifre delle decine e delle unità dei due numeri moltiplicati, e così via. Anche se i numeri da moltiplicare hanno un'infinità di cifre, dunque, ognuna delle cifre del risultato viene determinata in modo definitivo con un numero finito di calcoli.

Quando effettuiamo il prodotto di due numeri reali di cui non si conoscono che le prime cifre decimali, non otteniamo tutte le cifre decimali del risultato, proprio per la nostra conoscenza parziale delle cifre decimali dei due numeri di partenza. Nella moltiplicazione 10-adica precedente si osserva un fenomeno assolutamente analogo: la cifra che precede il 7 di sinistra sulla linea del risultato può essere calcolata solamente se si conoscono con una precisione più elevata i due numeri 10-adici di cui è il prodotto. Per calcolare la cifra che precede il 7 di sinistra bisogna completare la colonna 5-2-1-4 da ambo le parti, il che presuppone da un lato che si conosca una cifra in più del moltiplicando ...13283, e dall'altro che si conosca una cifra in più del moltiplicatore ...34742. Conoscendole entrambe, potremmo conoscere una cifra in più del risultato, e così via.

Un altro modo di fare le addizioni

L'insieme dei numeri 10-adici, così come è stato definito, possiede proprietà che riecheggiano quelle dei numeri ordinari. Alcuni fenomeni, però, sono un po' inattesi: ad esempio, se si aggiunge 1 (cioè ...00001) al numero ...99999 (composto unicamente di 9), si ottiene

$$
\begin{array}{rr}
 & {}^{1\,1\,1\,1} \\
 & 9\,9\,9\,9\,9 \\
+ & \\
\dots & 0\,0\,0\,0\,1 \\
\hline
= & 0\,0\,0\,0\,0
\end{array}
$$

In altri termini, ...99999 + 1 = 0: il numero ...99999, dunque, è *l'opposto* di 1 per l'addizione, ovvero ...99999 corrisponde a quello che indichiamo solitamente con − 1. La teoria dei numeri *g*-adici permette di dimostrare che la proprietà può essere generalizzata a tutti i numeri negativi. In maniera ancora più generale, la sua estensione dà al concetto di «numero razionale *g*-adico» il significato seguente: il numero 2/3, ad esempio, è «il numero che, moltiplicato per 3, dà 2»: nel mondo dei numeri reali, la sua espressione decimale è pari a 0,666... Lasciamo al lettore il compito di dimostrare che nel mondo 10-adico si ha ...33334 (un'infinità di 3 a sinistra del 4); si può anche mantenere l'espressione 2/3, oppure, se si teme di fare confusione con le frazioni ordinarie, ...002/...003.

Esiste dunque un equivalente 10-adico della radice quadrata di 2, ovvero un numero 10-adico che, moltiplicato per se stesso, dia 2?

Per come funziona la moltiplicazione tra numeri 10-adici, l'ultima cifra (cioè quella più a destra, compresa tra 1 e 9) del prodotto di due numeri 10-adici x e y è uguale all'ultima cifra del prodotto uv, dove u è l'ultima cifra di x e v quella di y. Sia quindi u l'ultima cifra dell'ipotetico numero 10-adico x tale che $x \times x = 2$: se x è un numero 10-adico «con la virgola», allora la cifra delle unità di u^2 deve essere nulla, il che è possibile solo se $u = 0$, mentre l'ultima cifra di un numero 10-adico con la virgola, per definizione, non è mai nulla (deve essere compresa tra 1 e 9). Conclusione: x è un

«intero 10-adico», vale a dire che non ha cifre decimali dopo la virgola. Sia u la sua «cifra delle unità»: dato che $x \times x = 2$, anche la cifra delle unità di u^2 vale 2. Ora, come abbiamo visto nel capitolo precedente e nel primo capitolo, un simile numero non esiste. Di conseguenza, *nei numeri* 10-*adici non esiste la radice quadrata di* 2, e la ragione è che 2 non è un residuo quadratico modulo 10. Più generalmente, dato un intero positivo g, se 2 non è un residuo quadratico in $\mathbf{Z}/g\mathbf{Z}$ (vedi cap. precedente) allora 2 non ammette radice quadrata nell'insieme $\mathbf{Q}_7$ dei numeri g-adici.

E in caso contrario? Essendo 2 un residuo quadratico in $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, esiste una radice quadrata di 2 nell'insieme $\mathbf{Q}_7$? La risposta è sì, e così come il movimento si dimostra camminando, il modo più semplice per convincersi dell'esistenza di un numero 7-adico il cui quadrato vale 2 è quello di costruirlo.

Sarà sufficiente trovare una radice quadrata di 2 in forma di intero 7-adico, poiché con un ragionamento analogo al precedente si dimostra che un'eventuale radice quadrata di 2 7-adica non può che essere un intero 7-adico. Sia x un intero 7-adico, di cui sceglieremo la «cifra delle unità» x_0, la «cifra delle settine» x_1, ecc., in modo tale che sia $x \times x = \ldots 00002$. A tale scopo, osserviamo che x_0^2 deve essere uguale a 2 modulo 7, e quindi $x_0 = 3$ o $x_0 = 4$ (si veda la tabella corrispondente del capitolo precedente).

Poniamo $x_0 = 3$. Per determinare il valore di x_1, calcoliamo la «cifra delle settine» del prodotto $x \times x$, che deve essere uguale a 0 (visto che vogliamo che sia sempre $x \times x = \ldots 00003$). Tale cifra, tra l'altro, è uguale alla cifra delle unità dell'espressione $1 + 2x_1x_0$ (1 corrisponde al riporto; per seguire meglio il principio di questo ragionamento, si invita il lettore a effettuare la moltiplicazione di $\ldots . x_5x_4x_3x_2x_1x_0$ per se stesso). Dato che $x_0 = 3$, x_1 è determinato dalla condizione: $1 + 6x_1 = 0$ modulo 7, dalla quale, come si può verificare immediatamente, si ha $x_1 = 1$. A questo punto possiamo passare alla «cifra delle settine delle settine»: con lo stesso procedimento si dimostra che x_2 deve soddisfare la relazione $1 + 2\, x_2x_0 + x_1^2 = 0$ modulo 7, da cui si ricava $x_2 = 2$.

Si può andare avanti su questa strada all'infinito: a ogni tappa, la cifra x_i che vogliamo conoscere è determinata da una relazione del tipo $6x_i + b_i = 0$ modulo 7, dove b_i è un intero che si determina in maniera esplicita a partire da x_1, x_2, eccetera fino a x_{i-1}. La rela-

zione $6x_i + b_i = 0$ modulo 7 determina sempre un unico numero x_i compreso tra 0 e 6. La radice quadrata di 2, quindi, viene costruita un passo alla volta, senza mai incontrare ostacoli che ne rallentino la progressione (per costruzione, si vede subito che il numero 7-adico x cui si arriva ha effettivamente la proprietà desiderata).

E se partissimo da $x_0 = 4$? Il seguito del ragionamento è assolutamente lo stesso, ma gli x_i che si ottengono sono diversi. L'insieme degli interi 7-adici, quindi, contiene *due* «radici quadrate di 2»: ...421216213 e ...245450454. Osserviamo come, conformemente a quanto ci suggerisce la relazione tra numeri ordinari $(\sqrt{2}) + (-\sqrt{2}) = 0$, si possa dimostrare che la somma dei due numeri 7-adici precedenti dia effettivamente ...0000.

Quante possono essere le radici quadrate di 2? Abbiamo appena visto come tra i numeri 7-adici vi siano due radici quadrate di 2, così come $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ sono due numeri reali «il cui quadrato vale 2» e i numeri 3 e 4 sono soluzioni dell'equazione $x^2 = 2$ in $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$. In altri casi, come quelli dei numeri 10-adici o dell'insieme $\mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$, non esistono radici quadrate di 2.

Ci sono altri insiemi di numeri in cui 2 ha una sola radice quadrata? La risposta è sì, come dimostra l'esempio di $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, in cui 2 ha una e una sola radice quadrata (esercizio: spiegare come mai, in $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, 2 coincide con la propria radice).

Altri insiemi contengono un numero più grande di radici quadrati di 2. Ad esempio, in $\mathbf{Z}/119\mathbf{Z}$ se ne contano quattro (11, 45, 74 e 108), e otto in $\mathbf{Z}/2737\mathbf{Z}$ (74, 465, 1145, 1201, 1536, 1592, 2272 e 2663). Con un po' di lavoro in più, e utilizzando, tra le altre cose, i risultati ottenuti alla fine del capitolo precedente, si può dimostrare il seguente risultato di ordine generale: prendiamo k numeri primi, tutti diversi da 2 e il cui resto della divisione per 8 sia 1 o 7. Moltiplichiamoli tra di loro, prendendone ognuno più volte, se vogliamo: per il numero n così ottenuto, in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ (così come in $\mathbf{Z}/2n\mathbf{Z}$), esistono esattamente 2^k radici quadrate di 2. Ad esempio, prendiamo $k = 3$, e scegliamo 7, 17 e 23 come numeri primi il cui resto della divisione per 8 sia 1 o 7. Scegliamo come n il numero $7 \times 7 \times 17 \times 23$, cioè 19 159: in $\mathbf{Z}/19159\mathbf{Z}$, quindi, ci sono 2^3 – otto – «radici quadrate di 2». Si può anche dimostrare che vale il reciproco: se il nume-

ro n è tale che in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ esiste una radice quadrata di 2 (il criterio per saperlo è quello descritto alla fine del capitolo precedente), allora il numero delle radici quadrate è uguale a 2^k, dove k è il numero di divisori primi distinti (diversi da 2) di n.

Una sparizione misteriosa

Abbiamo già dimostrato (vedi cap. 1) che la radice quadrata di 2 dei numeri reali non è decimale: qualsiasi numero decimale è più piccolo o più grande di $\sqrt{2}$. Sappiamo anche, tuttavia, che più decimali mettiamo, più ci avviciniamo a $\sqrt{2}$, per arrivarci quando i decimali diventano infiniti.

Con i numeri 10-adici, invece, non capita nulla di tutto ciò: anche con un'infinità di cifre a sinistra non si riesce a ottenere un numero 10-adico che, moltiplicato per se stesso, dia 2 (o piuttosto ...002). Sebbene sia $\mathbf{R}$ che $\mathbf{Q}_{10}$ contengano tutti i numeri razionali, e per quanto nessuno dei due presenti dei «buchi» (qualsiasi buco è tappato dal fatto stesso di prendere un'infinità di cifre – a destra per $\mathbf{R}$, a sinistra per $\mathbf{Q}_{10}$), solo $\mathbf{R}$ contiene un elemento che, moltiplicato per se stesso, dà 2.

L'insieme $\mathbf{Q}_7$, dal canto suo, contiene una radice quadrata di 2 (ne contiene addirittura due). Ecco, dunque, un fenomeno decisamente particolare: a seconda della base di numerazione utilizzata, l'insieme dei numeri che si ottiene partendo a sinistra cambia. Un comportamento del genere è diametralmente opposto a quello del caso in cui si parte verso destra, dove, in effetti, i numeri che si ottengono aggiungendo un'infinità di cifre dopo la virgola non sono altro che numeri reali, qualunque sia la base di numerazione prescelta (anche se, naturalmente, il modo in cui scriviamo un numero reale cambia da una base all'altra). Se non c'è da stupirsi che facendo partire le cifre a sinistra o a destra si ottengano entità matematiche differenti, è invece molto più inaspettato (e di difficile spiegazione) il fatto che la scelta della base abbia conseguenze così profondamente diverse a seconda della direzione in cui partono le cifre.

Irrazionale, un'altra volta...

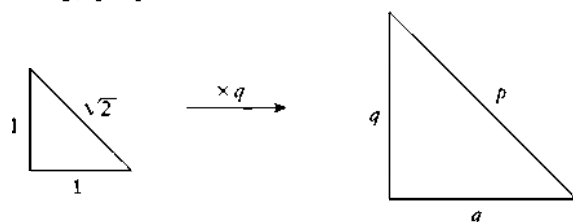
Dato che nei numeri g-adici esiste il concetto di frazione, o, in altri termini, di numero razionale, sapendo che in $\mathbf{Q}_7$ (tra gli altri) il numero 2 possiede una radice quadrata – anzi, addirittura due – è naturale chiedersi se queste radici sono numeri 7-adici razionali, ovvero se esistono due numeri 7-adici razionali p e q, esprimibili rispettivamente come $\dots 000p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0$ e $\dots 000q_l q_{l-1} \dots q_1 q_0$, tali che la frazione p/q (cioè $000p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0 \ / \ \dots 000q_l q_{l-1} \dots q_1 q_0$), moltiplicata per se stessa, dia ...0002. Tali numeri non esistono, ed è interessante il fatto che la dimostrazione classica dell'irrazionalità dei «numeri il cui quadrato vale 2» ($\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$) presentata nel capitolo 5 possa essere ripetuta praticamente alla lettera per ottenere l'irrazionalità delle radici quadrate di 2 nel mondo dei numeri 7-adici.

Supponiamo infatti che sia possibile scrivere nella forma p/q una o l'altra delle nostre radici quadrate di 2 7-adiche. Per definizione, dunque, si ha $(p/q)^2 = 2$. Il passo successivo consiste nel dedurre che $p^2/q^2 = 2$, e poi che $p^2 = 2q^2$; per poter applicare ai numeri 7-adici queste operazioni così familiari nell'ambito dei numeri reali, abbiamo però bisogno di una giustificazione. È uno dei problemi tipici che si incontrano quando si lavora in un nuovo insieme di numeri: anche se, come abbiamo visto, i suoi elementi hanno il buon gusto di organizzarsi secondo strutture simili a quelle dei numeri cui siamo abituati, non siamo esentati dall'obbligo di dimostrare che le proprietà valide per i numeri ordinari, come l'identità $(a/b) \times (c/d) = (ac)/(bd)$, valgono anche nel nuovo insieme. Non entreremo nei dettagli delle dimostrazioni, che non sono difficili e che lasciamo alla buona volontà del lettore: notiamo però come vi si utilizzi la seguente proprietà fondamentale delle operazioni sui numeri g-adici: le prime cifre del risultato di un'addizione o di una moltiplicazione tra numeri g-adici dipendono esclusivamente dalle prime cifre dei numeri in questione; l'osservazione è legata al concetto di *valutazione*, fondamento teorico della costruzione rigorosa di questi strani numeri che partono a sinistra.

Una volta giunti alla relazione $p^2 = 2q^2$, che in effetti andrebbe scritta come $(\dots 000p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0)^2 = (\dots 0002) \times (\dots 000q_l q_{l-1} \dots q_1 q_0)^2$,

bisogna osservare che la sua validità deve persistere anche nell'ambito degli interi ordinari: in altre parole, l'uguaglianza si conserva anche se si cancellano tutti gli zeri. Si ottiene così un'espressione del tipo $u^2 = 2v^2$, dove u è l'intero che in base sette ha la forma $...000p_k p_{k-1}...p_1 p_0$ e v è quello che in base sette si scrive $...000q_1 q_{1-1}...q_1 q_0$. Eccoci di nuovo, dunque, all'analisi della possibilità o dell'impossibilità di trovare due interi «ordinari» u e v tali che $u^2 = 2v^2$. La dimostrazione classica data nel capitolo 5, ad esempio, o alcune delle dimostrazioni del capitolo 6, fanno sfociare l'uguaglianza su una contraddizione che ci consente di dimostrare per assurdo che nessuno dei due numeri 7-adici il cui quadrato vale ...0002 è razionale.

Perciò, nell'insieme dei numeri 7-adici, e più generalmente dei numeri g-adici in cui esiste, la radice quadrata di 2 è irrazionale, e la sua irrazionalità è una conseguenza di quella della «vera» radice quadrata di 2. È veramente difficile rendere razionale la radice quadrata di 2, a meno di mettersi in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$...

Una conseguenza interessante dell'irrazionalità delle «radici quadrate di 2 7-adiche» riguarda la ripartizione delle loro cifre. Abbiamo visto prima che una di loro ha la forma ...421216213: è possibile definire una regola semplice che permetta di prevedere il valore delle cifre antecedenti, così come si può fare per ...0002/...0003 (che può scriversi come ...3334 e di cui sappiamo dare una descrizione semplice: «un 4, e poi dei 3»)? Il fatto di sapere che si ha a che fare con un numero irrazionale permette di dimostrare che la successione delle cifre non può essere «periodica», cioè non può corrispondere alla ripetizione di un unico «tema» di base come nel caso di ...3334 o ...14514514536 (i cui temi rispettivi sono «3» e «145»). Un numero del genere, in effetti, è sempre razionale: ad esempio, per $x = ...14514514536$ sia $y = (x - 36)/7^2 = ...145145145$. Si può verificare, allora, che $7^3y + 145 = y$, da cui segue che $y = 145/(7^3 - 1)$. Il numero y, quindi, è un numero razionale 7-adico, e perciò lo è anche x, per la relazione che lo lega a y. Il ragionamento, che per essere considerato una dimostrazione andrebbe però riformulato in modo più rigoroso, può essere generalizzato a qualsiasi numero g-adico periodico (qualunque sia g). Poiché sappiamo che le radici quadrate di 2 g-adiche, quando esistono, sono irrazionali, se ne deduce che l'espressione g-adica di una radice quadrata di 2 di $\mathbf{Q}_g$

non può essere periodica. Il ragionamento svolto sui numeri *g*-adici è rigorosamente identico, nella forma, a quello corrispondente per i decimali della «vera» radice quadrata di 2, come vedremo più avanti (vedi cap. 14). Questo fatto mostra come i numeri *g*-adici, per quanto diversi, abbiano tuttavia non pochi punti in comune con i numeri ordinari.

Appendice alla parte seconda

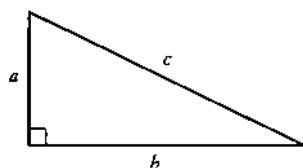
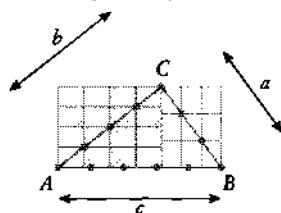
La dimostrazione più difficile del mondo?

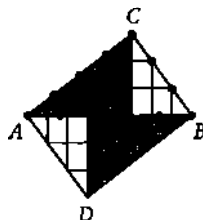
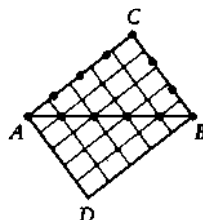
La più corta, la più elegante, la più antica... e perché non interessarsi anche alla più complicata tra le dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$? Quella che segue, per quanto tortuosa, non merita il titolo di «più difficile del mondo»; le estensioni che se ne possono ricavare per altri numeri irrazionali, però, possono aspirarvi.

Una dimostrazione con il teorema di Pitagora

Se $\sqrt{2}$ si può scrivere in forma di frazione p/q, allora, moltiplicando per q le dimensioni del triangolo rettangolo i cui lati valgono 1, 1 e $\sqrt{2}$, si ottiene un triangolo i cui lati valgono rispettivamente q, q e p:

Per sapere se esiste un triangolo rettangolo del genere, esaminiamo il problema più generale della determinazione delle *terne pitagoriche*, vale a dire di quegli interi a, b e c tali che il triangolo avente a, b e c come lati è rettangolo. Per il teorema di Pitagora (del quale troverete nel riquadro seguente una bella dimostrazione per i triangoli con lati di lunghezza intera), tali interi sono quelli che

verificano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$. La strategia consiste nell'ottenere la loro lista completa, per assicurarsi che in nessuna terna della lista si abbia $a = b$, e stabilire così l'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Il teorema di Pitagora per i triangoli rettangoli con lati interi Si può dimostrare partendo da un'idea proposta nel 1904 da Hieronymus Zeuthen, che ne illustrò l'applicazione al caso particolare più famoso di tutti, quello del triangolo i cui lati misurano rispettivamente 3, 4 e 5 (infatti si ha $3^2 + 4^2 = 5^2$, cioè $9 + 16 = 25$), ma la dimostrazione è la stessa per tutti i triangoli con lati di lunghezza intera (con qualche passaggio in più se ne può anche dedurre una dimostrazione valida per qualsiasi triangolo rettangolo).
Consideriamo quindi un triangolo ABC, rettangolo in C e i cui lati abbiano lunghezze intere a, b e c. Il lato $[AB]$ del triangolo è in posizione orizzontale. Disponiamo su tutta la lunghezza del lato $[BC]$ a rettangoli identici, con i lati orientati orizzontalmente e verticalmente e la cui diagonale, che abbiamo scelto di lunghezza 1, è inclusa nel segmento $[BC]$. Estendiamo la quadrettatura fino a costruire un insieme di a^2 rettangoli identici che formano un solo, grande rettangolo i cui lati sono orientati orizzontalmente e verticalmente, e la cui diagonale coincide con $[BC]$.
Facciamo la stessa cosa sul segmento $[AC]$: disegniamo b rettangoli (nella figura sono quelli ombreggiati) con i lati orientati orizzontalmente e verticalmente e le cui diagonali, anch'esse di lunghezza unitaria, sono incluse in $[AC]$; per finire, formiamo un rettangolo più grande composto da b^2 rettangoli piccoli allineati con l'asse orizzontale e quello verticale (sulle figure seguenti, si ha $a = 3$, $b = 4$ e $c = 5$).

Si vede subito che l'unione stessa dei due rettangoli più grandi è un rettangolo che contiene $a^2 + b^2$ rettangoli più piccoli. Osserviamo anche che tutti i rettangoli piccoli sono identici, dato che è possibile passare dagli uni agli altri con una semplice rotazione (di novanta gradi; ne lasciamo i dettagli al lettore). Osserviamo infine che la superficie del rettangolo più grande è esattamente il doppio di quella del triangolo *ABC*.

Ritagliamo le due porzioni del rettangolo grande situate all'esterno del triangolo *ABC*, e facciamole scivolare dall'altra parte del segmento [*AB*] così da formare un nuovo rettangolo, *ACBD*, avente [*AB*] come diagonale.

Il rettangolo *ABCD* così ottenuto contiene l'equivalente di $a^2 + b^2$ rettangoli piccoli. La sua diagonale è lunga c. Lungo quest'ultima, disponiamo c piccoli rettangoli, identici a quelli che abbiamo disegnato lungo [*BC*] e [*AC*]; un facile ragionamento sugli angoli ci mostra che i lati dei rettangoli disposti lungo [*AB*] sono paralleli a [*BC*] e [*AC*]. Così, aggiungendo a questi c rettangoli altri rettangoli, tutti orientati nello stesso modo, si forma un rettangolo la cui diagonale è [*AB*] e che, come si può vedere, coincide con il rettangolo *ACBD* della figura precedente.

I c^2 rettangoli racchiusi in *ACBD*, dunque, occupano la stessa superficie degli $a^2 + b^2$ rettangoli precedenti, il che dimostra la relazione $a^2 + b^2 = c^2$.

Ecco come definire la lista di tutte le terne pitagoriche. Se dei numeri interi positivi a, b e c soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$ e possiedono un divisore comune d, allora si ha $(a/d)^2 + (b/d)^2 = (c/d)^2$. Perciò possiamo limitarci alla ricerca delle terne di numeri interi a, b, c privi di divisori comuni, dato che tutte le altre possono esserne ricavate attraverso la moltiplicazione per uno stesso numero intero. Partendo da questo presupposto, a e b non possono essere pari (altrimenti, per la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, lo sarebbe anche c). Nel seguito supporremo che a sia dispari, ma è chiaro che il ragionamento resterebbe lo stesso anche se fosse b a essere dispari.

Riscriviamo la relazione che lega a, b e c come $a^2 = c^2 - b^2$. In virtù dell'identità $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ (vedi cap. 6), si ha $a^2 = (c + b)(c - b)$. Sia p un divisore primo di a. La relazione precedente implica che il prodotto $(c + b)(c - b)$ è divisibile per p^2. Ora, non è possibile che $(c + b)$ e $(c - b)$ siano entrambi divisibili per p, altrimenti lo sarebbero anche $(c + b) + (c - b) = 2c$ e $(c + b) - (c - b) = 2b$, il che non è possibile perché p è dispari e si è fatta l'ipotesi che a, b e c non abbiano divisori comuni. Il numero p, quindi, può dividere solo uno dei due valori: $(c + b)$ o $(c - b)$, e dato che, per quanto si è detto, il prodotto di queste due quantità è divisibile per p^2, o è $(c + b)$ a essere divisibile per p^2 o lo è $(c - b)$.

Scriviamo allora a come prodotto di due numeri, m e n, così definiti: m è il prodotto di tutti i fattori primi p di a tali che $(c + b)$ è divisibile per p^2, n è il prodotto di tutti i fattori primi p di a tali che $(c - b)$ è divisibile per p^2. Si ottiene così $a = mn$, e, con la relazione $a^2 = (c + b) + (c - b)$, si ha $m^2 = (c + b)$ e $n^2 = (c - b)$, da cui si ricava $b = (m^2 - n^2)/2$ e $c = (m^2 + n^2)/2$.

Il bilancio di tutto questo ragionamento è che se a, b e c non hanno divisori comuni e soddisfano la relazione $a^2 + b^2 = c^2$, allora esistono due interi dispari m e n, privi di divisori comuni, tali che:

$$a = mn \quad b = (m^2 - n^2)/2 \quad c = (m^2 + n^2)/2.$$

Non è difficile verificare che si tratta di una condizione sufficiente, cioè che tutti gli interi a, b e c che possono essere espressi in questa forma soddisfano effettivamente la relazione $a^2 + b^2 = c^2$.

Le terne pitagoriche, dunque, sono tutte ottenibili a partire da tre numeri interi m, n e d arbitrari (con l'unico vincolo che m e n

siano entrambi dispari e non abbiano divisori comuni), dai quali si arriva a a, b e c attraverso le relazioni:

$$a = dmn \quad b = d(m^2 - n^2)/2 \quad c = d(m^2 + n^2)/2.$$

Da tutto ciò si può dedurre una dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato, osservando che se la diagonale e il lato fossero commensurabili, allora esisterebbe una terna pitagorica tale che $a = b$ (dal momento che l'ipotenusa c del triangolo rettangolo è la diagonale di un quadrato se, e solo se, i due altri lati hanno la stessa lunghezza). Basta dimostrare, quindi, che non si possono trovare degli interi d, m e n tali che $dmn = d(m^2 - n^2)/2$ (con m e n dispari e senza divisori comuni), cioè che non esistono due interi m e n dispari e senza divisori comuni tali che $2mn = m^2 - n^2$.

Supponiamo di aver trovato due numeri del genere. Osserviamo che $m^2 - n^2 = (m + n)\,(m - n)$ e che, essendo m e n entrambi dispari, i numeri $(m + n)$ e $(m - n)$ sono entrambi pari. Pertanto il loro prodotto, uguale a $m^2 - n^2$, è multiplo di 4, e la relazione $2mn = m^2 - n^2$ implica che $2mn$ è multiplo di 4, cioè che uno dei due, tra m e n, è pari, il che contraddice la nostra ipotesi. Conclusione: non esiste una terna pitagorica associata a un triangolo isoscele rettangolo, e dunque la diagonale del quadrato non è commensurabile al suo lato. Lasciamo al lettore il compito di analizzare come si dimostra l'irrazionalità della radice quadrata di altri numeri interi a partire dall'espressione generale per le terne pitagoriche che abbiamo appena dato.

La radice n-esima di 2

Occupiamoci adesso della possibilità di generalizzare questa dimostrazione per stabilire l'irrazionalità della radice n-esima di 2, $\sqrt[n]{2}$. Nel corso del capitolo 5 abbiamo accennato al fatto che la dimostrazione classica dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ può essere adattata senza difficoltà alla dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt[n]{2}$. In effetti è possibile arrivare a tale risultato generalizzando l'idea di terna pitagorica. Seguendo per $\sqrt[n]{2}$ lo stesso percorso fatto per $\sqrt{2}$, arriviamo alla seguente serie di calcoli: se $\sqrt[n]{2}$ è uguale alla frazione p/q, allora $2 = p^n/q^n$, da cui $p^n = 2q^n$, ovvero $p^n = q^n + q^n$. Applicando alla

potenza n il ragionamento seguito poco fa per la potenza 2, il problema diventa quello di dimostrare che l'equazione

$$a^n + b^n = c^n$$

non ha soluzioni intere con $a = b$. L'idea, dunque, è quella di elencare tutte le terne di interi a, b e c che rappresentano una soluzione di questa equazione, e di verificare poi che per nessuna di loro si ha $a = b$.

Il fatto è che oggi sappiamo che *non esiste* una terna di interi non nulli tale che $a^n + b^n = c^n$ (con n intero maggiore o uguale a 3): è l'enunciato del famoso «teorema di Fermat», grazie al quale l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ si trova a essere «dimostrata» (se non esistono terne che soddisfano l'equazione, allora, *a fortiori*, non ce ne sono con $a = b$).

Il teorema di Fermat deve il suo nome al matematico francese del XVII secolo Pierre de Fermat, il quale, in una famosa annotazione a margine dell'*Aritmetica* di Diofanto (opera che contiene, tra le altre cose, la soluzione al problema delle terne pitagoriche che abbiamo appena visto), aveva affermato di aver trovato una dimostrazione «meravigliosa» dell'impossibilità di trovare tre interi a, b e c tali che $a^n + b^n = c^n$ (con n intero maggiore o uguale a 3). Non si è mai trovata traccia della dimostrazione. Oggi siamo convinti che Fermat si fosse fatto trascinare un po' dall'entusiasmo. Il suo teorema è stato dimostrato dal britannico Andrew Wiles, che ne è venuto a capo nell'ultimo decennio del XX secolo al termine di uno sforzo erculeo, realizzato grazie a un gran numero di scoperte fatte in campo matematico nel corso dei tre secoli trascorsi dall'epoca di Fermat.

Poche persone al mondo sono in grado di capire anche solo le nozioni generali alla base del ragionamento di Wiles, e ancora di meno sono quelle che hanno letto interamente i suoi lavori. È per questo, dunque, che la «dimostrazione» precedente dell'irrazionalità di $\sqrt[n]{2}$ (della quale, però, non siamo riusciti a identificare l'autore, nonostante tutte le ricerche svolte) è indubbiamente la più difficile che si possa immaginare... se non fosse per un particolare. In effetti, bisogna essere sicuri che la dimostrazione di Wiles non utilizzi essa stessa l'irrazionalità di $\sqrt[n]{2}$, altrimenti ci troveremmo di fronte a una petizione di principio, un ragionamento che si serve delle proprie conclusioni per raggiungere l'obiettivo. Da qui

deriva l'interrogativo drammatico che abbiamo posto a Wiles: è possibile che nei suoi lavori sull'argomento si annidi un riferimento ineliminabile al fatto che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale? Il «vincitore» del teorema di Fermat non è sembrato completamente sicuro della risposta da dare, ma ritiene comunque che l'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$ figuri già nella (lunga) lista dei risultati utilizzati nei suoi lavori sull'argomento. Purtroppo, quindi, il ragionamento precedente non merita il titolo di dimostrazione più difficile al mondo dell'irrazionalità di $\sqrt[3]{2}$.

Parte terza

Una costante universale

«Il modo del disegnarle sia tratto dai matematici».
Leon Battista Alberti, *De re aedificatoria*, III, 2.

Esiste un numero irrazionale dagli usi così molteplici come la radice quadrata di 2? Dall'architettura alla musica, passando per la fotografia o i formati dei nostri fogli di carta, la lista dei campi in cui interviene $\sqrt{2}$ dà rapidamente il capogiro. Invece di ricorrere a una classificazione per discipline, che rischierebbe di essere sbilanciata, abbiamo deciso di ordinare gli usi della radice quadrata di 2 secondo le proprietà matematiche messe in gioco.

Il capitolo 9 si interessa alla sua caratteristica geometrica più semplice e immediata, che è quella di corrispondere al rapporto tra la lunghezza della diagonale di un quadrato e quella del suo lato. Questa proprietà, così come il suo corollario, che fa della diagonale la «duplicatrice del quadrato» (ovvero la linea a partire dalla quale si costruisce un quadrato di area doppia di quella di un quadrato dato), è stata commentata da filosofi come Platone, ed è riconosciuta da secoli come fondamentale dagli architetti. Viene utilizzata anche nella fotografia.

Il capitolo 10 considera la radice quadrata di 2 come «media geometrica di 1 e 2», una proprietà utile tanto all'architettura e alla fotografia quanto alla teoria della musica.

Il capitolo 11 parte dalla proprietà fondamentale del «rettangolo diagonale» (il rettangolo in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è di $\sqrt{2}$), cioè il fatto che piegandolo in due nel senso della lunghezza si ottiene un altro rettangolo diagonale. Questa proprietà è all'origine dell'applicazione più spettacolare della radice di 2: la definizione del formato dei fogli di carta, la cui genesi movimentata risale al XVII secolo. Oltre a godere di varie proprietà geome-

triche di una certa eleganza, i rettangoli diagonali consentono anche di dare nuove dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Il capitolo 12, infine, occupa un posto a sé. Vorrebbe essere un'incitazione alla prudenza, allo scopo di evitare che alcuni passaggi di questa parte del libro non siano visti come un incoraggiamento a voler scovare la radice quadrata di 2 un po' troppo spesso. È a causa degli eccessi verificatisi per un caso simile (quello del «numero aureo») che ci hanno convinto della necessità di spendere tutto il tempo necessario per mettere in guardia il lettore.

9.

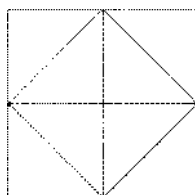
La diagonale del quadrato

La tavoletta babilonese YBC 7289 di cui abbiamo parlato nel primo capitolo ci dice l'età della definizione della radice quadrata di 2 come rapporto tra la diagonale e il lato del quadrato. Tra le conseguenze fondamentali della definizione, c'è questa: per assicurarsi, nel corso della costruzione di un edificio, che i punti di riferimento formino effettivamente un quadrato, non basta verificare che i quattro lati del quadrilatero così formato siano uguali, poiché questo ci garantisce che abbiamo a che fare con un rombo ma non necessariamente con un quadrato. Serve quindi un altro tipo di controllo, che potrebbe essere proprio la verifica che il rapporto tra una diagonale e il lato sia effettivamente pari a $\sqrt{2}$. Secondo lo storico dell'architettura Peter Schneider, la proprietà del rapporto $\sqrt{2}$ era già utilizzata nell'antico Egitto. Le unità di misura egiziane del cubito reale e del cubito-remen, il cui rapporto era di 7/5 (non lontano da $\sqrt{2}$ – vedi cap. 1), sarebbero state concepite per aiutare gli architetti nella realizzazione materiale dei quadrati.

Una seconda proprietà cruciale della diagonale è che permette di raddoppiare l'area del quadrato. Si tratta di una caratteristica osservata e utilizzata, oltre che dagli architetti e dai fotografi, anche dai filosofi, primo tra tutti nientemeno che Platone.

Un'alleata inaspettata dei filosofi

Uno degli obiettivi del dialogo di Platone intitolato *Menone* (vedi cap. 2) è di presentare l'opinione di Socrate per cui progredire nel-

la conoscenza non significa imparare cose nuove, ma ricordarsi delle conoscenze già presenti nelle profondità del nostro essere. La «maieutica socratica» è l'arte di aiutare un interlocutore a impossessarsi di questo sapere sepolto con una serie di domande mirate. Per illustrare questo aspetto del pensiero socratico, Platone si serve della diagonale del quadrato. Nel *Menone*, egli fa di Socrate la levatrice dell'anima di uno schiavo partendo dal problema della duplicazione del quadrato: dato un quadrato, determinare come costruirne un altro di area doppia. Socrate riesce a mostrare allo schiavo, non senza lunghe divagazioni, che la soluzione del problema sta nella diagonale del quadrato. Il metodo, elementare, mostra che, contrariamente a ciò che si legge talvolta, per arrivare al risultato non è necessario conoscere il teorema di Pitagora.

Il quadrato bianco formato dalle diagonali dei quadrati più piccoli contiene quattro triangoli, mentre ognuno dei quattro quadrati più piccoli ne contiene solo due. L'area del quadrato bianco, dunque, è doppia di quella dei singoli quadrati più piccoli. Così, dato un quadrato *C*, costruendo il quadrato *C'* il cui lato è la diagonale di *C* si realizza la duplicazione di *C*.

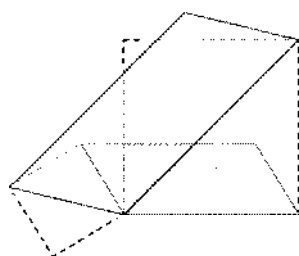
Nel XVIII secolo, anche quel grande diffusore di idee scientifiche che è Voltaire si serve della diagonale per illustrare la sua teoria sull'apprendimento. Alla voce «Geometria» del suo *Dizionario filosofico*, infatti, il filosofo dei Lumi mette in scena un dialogo tra un maestro e un discepolo, che in alcuni passaggi non manca di evocare quello tra Socrate e lo schiavo. La diagonale, «questa linea di cui non si saprà mai il valore» (poiché $\sqrt{2}$ è irrazionale), è utilizzata come mezzo per suscitare la curiosità dell'allievo. Mentre il greco si ferma alla proprietà della duplicazione, però, il francese si mostra più esplicito sull'esistenza di quantità irrazionali. Un discorso analogo viene fatto per la radice quadrata di 5, di cui Voltaire spiega che vale «due più una frazione» ma che «tale frazione non può esprimersi in cifre perché il quadrato di un numero [intero] più una frazione non può essere un numero intero».

Malgrado tutto, a Voltaire così come a Platone non interessa tenere un corso sulle grandezze incommensurabili. Il suo obiettivo è anzitutto quello di difendere l'idea che per «far imparare facilmente ai giovani gli elementi della geometria, [è meglio] seguire il cammino delle nostre scoperte e dei bisogni che le hanno prodotte». In altri termini, Voltaire afferma che è lo sviluppo storico della matematica a dettare l'ordine in cui è meglio insegnarla (un'idea che, ai giorni nostri, riappare periodicamente con l'etichetta di innovazione pedagogica). Nella trattazione di questa problematica, ben distinta dalla semplice questione della diagonale del quadrato, egli non coglie l'occasione di andare al di là di qualche affermazione di ordine generale sui risultati di base. Così come Socrate fa vedere allo schiavo molto meno di quel che sa, leggendo il dialogo di Voltaire è impossibile sospettare la vastità delle conoscenze disponibili nel XVIII secolo sulla teoria dei numeri...

Gli architetti e la duplicazione

Al di là delle questioni di ordine speculativo, l'utilità pratica della duplicazione del quadrato è riconosciuta fin dall'antichità. Nel I secolo a. C., l'architetto romano Marco Vitruvio se ne occupa esplicitamente nel primo capitolo del libro IX del suo *De architectura*. Il problema che si pone all'architetto è il seguente: per realizzare un quadrato di area doppia di quella di un quadrato dato, la prima idea è quella di determinare numericamente la lunghezza del lato di questo quadrato di area doppia. Ora, se $\sqrt{2}$ fosse uguale a una frazione p/q, un architetto non avrebbe problemi a effettuare la duplicazione: partendo da un quadrato di lato q (in un'unità di misura scelta opportunamente), costruirebbe un quadrato di area doppia a partire da un segmento di lunghezza pari a p. L'irrazionalità di $\sqrt{2}$ rende impossibile applicare un procedimento del genere: Vitruvio lo afferma scrivendo che «non si può venire a capo [del problema] con la moltiplicazione, né con altri metodi basati sui numeri».

È a Platone in persona che Vitruvio, con molti complimenti ma in modo sicuramente sbagliato, attribuisce l'invenzione del metodo geometrico di duplicazione del quadrato presentato nel *Menone*. Dato che, come scrive l'architetto, «il lato più grande che si

possa trovare in [un] quadrato» (cioè la diagonale) «non potrebbe essere ottenuto attraverso il calcolo numerico», non resta che una soluzione: «bisogna farlo servendosi di linee tracciate in modo opportuno».

Grazie a Vitruvio, quindi, la geometria si impone sul numero. Molto meno felice, invece, è la sua spiegazione del carattere incommensurabile della diagonale e del lato del quadrato. L'architetto parte da un quadrato di 10 piedi di lato, cioè con un'area pari a 100 piedi quadrati, che va duplicato. Egli spiega che mentre un quadrato di 14 piedi di lato ha una superficie di 196 piedi quadrati (cioè 14^2), inferiore ai 200 piedi quadrati cui si vuole arrivare, un quadrato con il lato lungo 15 piedi ha un'area di 225 piedi quadrati (15^2), è troppo grande; «dunque», conclude in pratica Vitruvio, non è possibile trovare due lunghezze p e q tali che il quadrato di lato q abbia un'area doppia di quella del quadrato di lato p. Un po' corta, come dimostrazione...

L'eleganza e la semplicità della soluzione geometrica al problema della duplicazione del quadrato suggeriscono abbastanza naturalmente l'esistenza di un metodo analogo per la duplicazione del cubo, un problema la cui origine mitica ci riconduce all'architettura. Eratostene, matematico e poeta, riferisce infatti la storia secondo la quale il leggendario re Minosse, ritenendo che un monumento che aveva fatto erigere fosse in effetti troppo piccolo, ordinò che se ne costruisse uno grande il doppio (in un'altra leggenda, più famosa, Apollo ordina ai Greci dell'isola di Delo che gli sia consacrato un nuovo altare, con un volume doppio di quello esistente). In termini moderni, questa volta si tratta di riuscire a tracciare un segmento la cui lunghezza non è più $\sqrt{2}$, ma $\sqrt[3]{2}$ (dato che il volume di un cubo dipende dalla terza potenza del suo lato).

In realtà l'analisi geometrica del problema della duplicazione del cubo è di una difficoltà incomparabile rispetto a quella del quadrato. Ciò nonostante, i Greci lo risolsero, e in due modi diversi (vedi cap. 10). Secondo quanto ci dice Plutarco nel primo secolo della nostra era, Platone aveva criticato le due soluzioni perché la loro realizzazione materiale richiede l'utilizzo di dispositivi meccanici più complessi del righello e del compasso. Si dovette aspettare l'algebra del XIX secolo e i lavori di Pierre-Laurent Wantzel sui «corpi di numeri costruibili» perché fosse chiaro una volta per tutte che

il righello e il compasso, da soli, non bastano per costruire un segmento di lunghezza pari a $\sqrt[3]{2}$. A quell'epoca il problema aveva già rivelato la sua natura profonda, che non è geometrica, ma algebrica. Molto tempo dopo aver sconfitto l'aritmetica sulla duplicazione, la geometria conobbe la sconfitta, questa volta a opera dell'algebra, sul terreno della duplicazione del cubo.

La duplicazione del quadrato a partire dalla diagonale apre la strada anche alla sua triplicazione, quadruplicazione, e così via (vedi cap. 11), così come alla duplicazione di altre superfici. Per duplicare un parallelogramma, ad esempio, basta costruire due quadrati, uno sulla sua larghezza e uno sulla sua lunghezza, per poi prenderne le diagonali; a partire da queste si forma un nuovo parallelogramma, che ha la stessa forma del primo ma una larghezza e una lunghezza moltiplicate per $\sqrt{2}$, e la cui area, dunque, è doppia di quella del primo.

Il metodo può essere esteso alla duplicazione di qualsiasi altro poligono, poiché raddoppiare l'area di una superficie equivale a moltiplicarne il perimetro per $\sqrt{2}$ (supponendo di conservare la forma della superficie). Si tratta di un teorema la cui dimostrazione rigorosa si basa sul caso del quadrato. Per i poligoni, però, c'è una piccola complicazione: con questo metodo si rendono talvolta necessari dei piccoli aggiustamenti geometrici per incollare tra di loro come si deve i segmenti la cui lunghezza è stata moltiplicata per $\sqrt{2}$ (certi casi particolari sono più facili da trattare – si veda oltre).

Catturare la luce

Il fatto che $\sqrt{2}$ sia il fattore moltiplicativo da applicare alle dimensioni di una figura per raddoppiarne l'area trova un'applica-

zione pratica nella fotografia, dove uno dei problemi è quello di valutare la quantità di luce vista dalla pellicola. Tale quantità dipende in maniera diretta dall'area del diaframma, il foro circolare che lascia passare la luce. È per questo che sull'obiettivo di un apparecchio fotografico classico 24 × 36 (sempre più fuori moda, con l'arrivo delle macchine digitali) si trova questa lista di numeri, che permette di scegliere il diametro di apertura del diaframma:

$$1 - 1{,}4 - 2 - 2{,}8 - 4 - 5{,}6 - 8 - 11 - 16\ldots$$

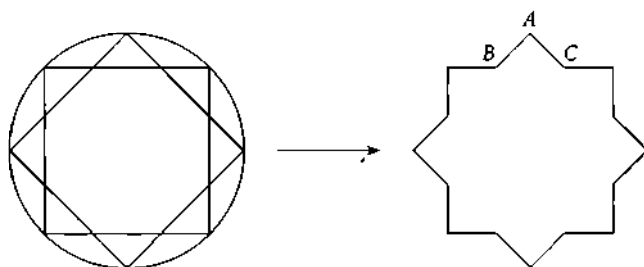
Si tratta di approssimazioni delle potenze successive della radice quadrata di 2 : $1{,}4 \approx \sqrt{2}$, $2 = (\sqrt{2})^2$, $2{,}8 \approx (\sqrt{2})^3$, ecc. (gli arrotondamenti sono stati imposti da ragioni di natura pratica). Passare da un numero della lista al successivo ha come effetto quello di dividere per $\sqrt{2}$ il raggio del diaframma, cioè dividere per 2 l'area del diaframma (e quindi anche la quantità di luce intercettata dall'apparecchio).

Che interesse ha una scala simile? In effetti, si potrebbe pensare invece a qualcosa che faccia aumentare o diminuire la quantità di luce intercettata di una certa quantità – sempre la stessa – facendo variare l'apertura. Il punto di vista «moltiplicativo», tuttavia, si impone su quello «additivo» a causa di una legge scoperta nel 1890 dallo svizzero Ferdinand Hurter insieme al britannico Vero Driffield. Scegliendo in maniera opportuna l'apertura del diaframma (oltre ad altri parametri, tra i quali vi è il tempo di esposizione), il fotografo controlla la «densità» dell'immagine, vale a dire, in questo caso, la sua opacità. La «relazione di Hurter e Driffield» esprime la relazione tra la densità e la quantità di luce ricevuta: per aumentare la densità, diciamo, del 10%, bisogna *moltiplicare* la quantità di luce che giunge sulla pellicola per un fattore che dipende dalle caratteristiche tecniche. La cosa importante, qui, è che il fattore è lo stesso sia che si tratti di far passare la densità da 20% a 30%, sia che la si voglia far passare da 70% e 80%, o altro ancora (tutto ciò, però, funziona solo se non ci si mette in condizioni troppo estreme). Ecco, dunque, per quale ragione conviene disporre di una successione di aperture in cui il rapporto tra un elemento e il successivo è costante. La scelta di tale rapporto si è orientata su un valore che fosse, al tempo stesso, il più semplice e il più piccolo (per consentire il massimo di finezza nelle densità), ovvero un rappor-

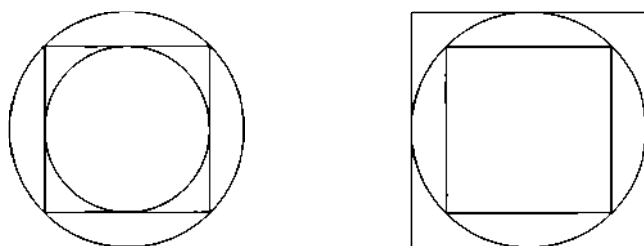
to tra le aree pari a 2 (può capitare, però, che siano necessari degli aggiustamenti – vedi cap. successivo). La scala delle densità utilizzata nella fotografia, nota come «zona sistema» e concepita nel 1940 dagli americani Ansel Adams e Fred Archer, si basa su questo rapporto.

L'Islam e la geometria di $\sqrt{2}$

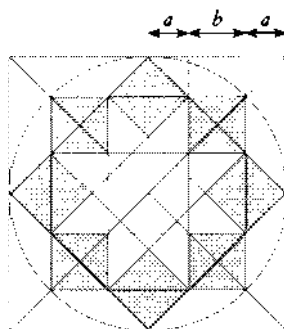
Gli artisti che hanno sfruttato in maniera più intensiva le proprietà della diagonale del quadrato per fini estetici sono, con ogni probabilità, quelli dell'Islam. Non potendo sviluppare un'arte figurativa per divieti di natura religiosa, questi artisti hanno rivolto l'attenzione a rappresentazioni astratte basate su motivi puramente geometrici, onnipresenti nel mondo musulmano e realizzate su ogni tipo di materiale: tegole, mattoni, legno, rame, carta, gesso o anche vetro. Siamo abituati a vedere le raffigurazioni di questi motivi su molti edifici, ma ne troviamo degli esempi anche su tappeti, manoscritti, porte ecc.

Un motivo estremamente comune nell'arte islamica è quello costituito dal contorno esterno di due quadrati inscritti in un cerchio (si veda qui sotto).

Questa figura, così come altre che le sono correlate, è l'elemento costituente di molti schemi le cui proprietà geometriche si fondano sulle proprietà della radice quadrata di 2 (sulla figura precedente si ha $BC/AC = \sqrt{2}$).

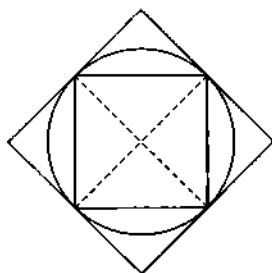
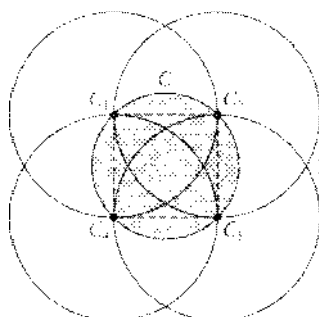
Sembra che il metodo della duplicazione del cerchio a partire dal quadrato sia servito a questi artisti anche per elaborare una scala di

proporzioni basata sul rapporto $\sqrt{2}$, inscrivendo quadrati e cerchi gli uni negli altri. Tanto per fare un esempio, ritroviamo inclusioni del genere sulla facciata del mausoleo di Ismail Samani, costruito intorno al 907 a Bukhara, nell'odierno Uzbekistan. In seguito anche Leonardo da Vinci menzionerà questa proprietà, a proposito della quale lasciamo al lettore, come esercizio, il compito di trovare un modo per duplicare facilmente qualsiasi poligono inscritto in un cerchio (e, in particolare, qualsiasi poligono regolare).

«Quando due cerchi toccano un medesimo quadrato in quattro punti, uno è il doppio dell'altro»; «quando due quadrati toccano lo stesso cerchio in quattro punti, uno è il doppio dell'altro» (Leonardo da Vinci, Ms. *G*17*r*).

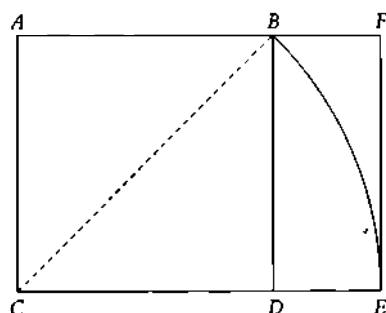
Per dimensionare gli elementi di base necessari alla realizzazione di una tassellatura geometrica a partire da un sistema di proporzioni definito dalla radice quadrata di 2, gli artigiani del mondo musulmano si avvalgono di costruzioni semplici, che non richiedono conoscenze geometriche avanzate (di fatto, molto spesso ne sono ben lontani). Ciò non significa che la teoria sottostante sia rozza, tutt'altro. In particolare, nella figura alla pagina seguente, che mostra un motivo di base ripetibile all'infinito per decorare una porta, un tappeto o altro, è possibile discernere alcuni elementi di base della teoria delle «frazioni continue» (vedi cap. 17; quando il lettore lo avrà letto, potrà riprendere questa figura e esaminare in che modo i segmenti di lunghezza *a* e *b* sono legati allo sviluppo in frazione continua della radice quadrata di 2).

Anche l'Occidente medievale utilizza il quadrato e la sua diagonale. In quello che è noto come il suo «taccuino», Villard de Honnecourt, architetto del XIII secolo, ci ha tramandato una serie di costruzioni di geometria applicata, tra cui l'equivalente della duplicazione del quadrato, da usarsi in circostanze diverse. Costruzioni

I quadrati ombreggiati hanno tutti la stessa area. Il loro lato è *b* e la loro diagonale è *2a*.

di questo tipo sono dette *ad quadratum*. Non è escluso che alcuni pittori senesi, tra cui Duccio tra il XIII e il XIV secolo, abbiano utilizzato nelle loro composizioni le successioni di quadrati annidati gli uni negli altri secondo il sistema di proporzioni descritto poco fa. Il riferimento più antico alle costruzioni medievali *ad quadratum* si trova nel *Büchlein von der Fialen Gerechtigkeit* [Libretto sulla costruzione dei pinnacoli, 1486] di Matthias Roriczer, l'architetto della cattedrale di Ratisbona.

I cerchi di Leonardo da Vinci Per dimostrare che il quadrato circoscritto a un cerchio ha un'area doppia di quella del quadrato inscritto, Leonardo da Vinci spiega che «degli otto triangoli di cui è composto il quadrato più grande, il quadrato più piccolo ne contiene quattro». Lo si capisce meglio facendo ruotare di novanta gradi il quadrato grande in questione.

Notiamo tra l'altro un'altra bella osservazione di Leonardo, anche questa molto elementare: se C_1, C_2, C_3 e C_4 sono i vertici di un quadrato inscritto nel cerchio C, allora i cerchi i cui centri coincidono con tali vertici e le cui circonferenze passano per due altri vertici del quadrato sono tutti di area doppia di quella delimitata dal cerchio C (*Forster II 51v*). Eccone una dimostrazione: se si parte da un quadrato il cui lato ha lunghezza unitaria, allora il raggio comune ai quattro cerchi più grandi è lungo 1, mentre quello di C è lungo $\sqrt{2}/2$. Dal momento che l'area di un cerchio è proporzionale al quadrato del suo raggio (dalla formula $A = \pi R^2$), il rapporto tra le aree è $1^2/(\sqrt{2}/2)^2$, che vale proprio 2.

Dal quadrato al rettangolo

Agli artisti dell'Islam la radice quadrata si imponeva, per così dire, naturalmente: non si capisce, infatti, in che modo un'arte che utilizza rappresentazioni puramente geometriche costituite da simmetrie e da tassellature del piano avrebbe potuto evitare l'uso del quadrato (uno degli unici tre poligoni regolari, insieme al triangolo e all'esagono, che permettono di ricoprire perfettamente una superficie piana) e, di conseguenza, dei rapporti in cui interviene la radice quadrata di 2 (i lavori di Issam El-Saïd hanno dimostrato che, oltre al quadrato, sono due le figure che permettono di definire il fondamento geometrico dell'arte islamica: l'esagono regolare e il «doppio esagono regolare», che si ottiene sovrapponendo due esagoni identici e facendoli ruotare di un dodicesimo di giro uno

rispetto all'altro). Per gli artisti del Rinascimento, invece, un'eventuale assenza della radice di 2 nell'arte sarebbe stata meno sorprendente, nella misura in cui la matematica che li ispirava era anzitutto quella delle proporzioni tra numeri interi, cioè quantità razionali (vedi cap. seguente). Tuttavia i riferimenti alla radice di 2 e alla duplicazione del quadrato non mancano, per ragioni sia estetiche che pratiche. Vi si può scorgere l'influenza di Vitruvio: nel capitolo 4 del libro VI del suo *De architectura*, l'architetto romano spiega che le «simmetrie» (termine che utilizza nel senso di «proporzioni») migliori per definire le dimensioni di un atrio, elemento essenziale dell'abitazione romana, sono tre, e corrispondono ai rapporti 5/3 per la prima e 3/2 per la seconda; «nel terzo si descriva la larghezza in un quadrato di lati eguali, e in questo quadrato si tiri una diagonale; e quanto sarà lo spazio della detta linea, tanta sia la lunghezza dell'atrio». Vitruvio, inoltre, fornisce un metodo semplice per costruire il rettangolo in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è uguale alla radice quadrata di 2. Anche gli artisti dell'Islam si sono serviti di questo rettangolo, ad esempio riservando il quadrato di sinistra a disegni geometrici e la porzione di destra a eleganti calligrafie.

Dato il quadrato *ABCD*, tracciamo un arco di cerchio di centro *C* e raggio *CB*, che interseca la semiretta [*CD*) in *E*. La perpendicolare alla retta (*CE*) passante per *E* interseca la semiretta [*AB*) in *F*. In tal modo nel rettangolo *ACEF* il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è pari a $\sqrt{2}$.

Un nome per un rettangolo

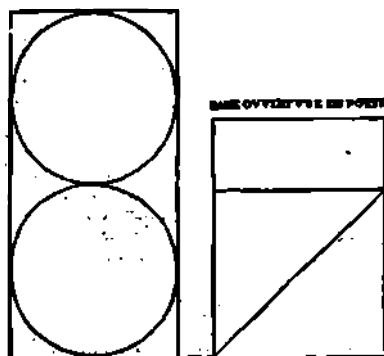
I rettangoli il cui rapporto tra la lunghezza e la larghezza è uguale a $\sqrt{2}$ hanno svolto un ruolo speciale nella storia dell'architettura, come vedremo tra poco. Dato che nel seguito del libro li ritroveremo anche in altri contesti, è necessario trovar loro un nome. Non ci è stato possibile trovare un termine che fosse utilizzato con sufficiente frequenza da imporsi come norma: prima di proseguire, quindi, dedichiamo un po' di tempo alla risoluzione di questo problema.

Per quanto riguarda il francese, una definizione è stata proposta dal pittore Paul Sérusier, attivo a cavallo tra l'Ottocento e il Novecento: affascinato da una particolare forma di estetica legata ai rapporti geometrici, Sérusier ha utilizzato la bella espressione «porta di armonia». La ragione per cui non l'abbiamo fatta nostra sta proprio nel suo fascino misterioso: non sono rari i casi in cui un nome troppo «meraviglioso» ha contribuito ad alimentare l'entusiasmo eccessivo di qualche appassionato (vedi cap. 22). Nel suo *ABC de la peinture*, Sérusier afferma che «il rapporto è tradizionalmente impiegato dagli artigiani più umili», aggiungendo che «la misura ha il carattere della solidità e un po' di pesantezza. La ritroviamo spesso negli oggetti di uso comune: tavoli, bauli, armadi, costruzioni rustiche. Falegnami e muratori di campagna l'hanno conservata come una tradizione. I pittori l'hanno definita: formato paesaggio». Il formato paesaggio è, insieme ai formati figura e marina, una delle tre serie di taglie di intelaiatura utilizzate abitualmente dai pittori; in realtà, della ventina di rettangoli della serie paesaggio, solo cinque si avvicinano davvero alla «porta di armonia» di Sérusier (gli altri se ne discostano per varie ragioni): con simili presupposti, sembra ugualmente difficile poter parlare di «rettangolo paesaggio».

E nelle altre lingue? In certi testi di lingua inglese si parla di *root-2 rectangle*, la cui traduzione letterale, «rettangolo radice di 2», non è molto bella. Verso la fine degli anni settanta, il «Sunday Telegraph» annunciò che la Società britannica di origami cercava un nome per questo tipo di rettangolo, il cui formato corrisponde a quello dei nostri fogli di carta (vedi cap. 11). (L'origami è l'arte,

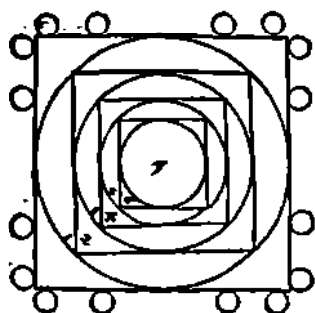
di origine giapponese, di piegare la carta – vedi capp. 22 e 17.) Le proposte non si fecero attendere, dallo scherzoso *rutatu* (una nipponizzazione di *root of two*!) al più poetico «Dina» (con riferimento alla norma DIN – vedi cap. 11). Il termine che finì per imporsi tra i piegatori di carta britannici fu quello proposto dai lessicografi di Oxford: il «rettangolo d'argento» (*silver rectangle*), per analogia con il «rettangolo aureo», caratterizzato da un rapporto lunghezza/larghezza uguale al «numero aureo», $(1 + \sqrt{5})/2$ (circa 1,618 – vedi capp. 12, 23 e 24). Proseguendo sullo stesso filone, David Lister, uno specialista di origami, ha definito «rettangolo di bronzo» (*bronze rectangle*) quel rettangolo in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza vale $\sqrt{3}$.

Chiamare rettangolo d'argento il rettangolo il cui rapporto lunghezza/larghezza è di $\sqrt{2}$ ha il doppio inconveniente di essere arbitrario e di suggerire una gerarchia assolutamente ingiustificata: lo stesso Lister è convinto che per gli origamisti i «rettangoli d'argento» abbiano un grande valore, a differenza dei rettangoli aurei, dei quali, a quanto pare, nessuno ha ancora trovato un aspetto interessante per l'origami. Altro problema per i rettangoli d'argento e di bronzo: c'è chi utilizza gli stesi metalli per designare altri due numeri (si tratta di $1 + \sqrt{2}$ e $(3 + \sqrt{13})/2$), che nel capitolo 23, per ragioni tecniche, saranno indicati come «2-numero aureo» e «3-numero aureo».

Infine, per una ragione legata alla storia della norma dei formati della carta (vedi cap. 11), di un rettangolo in cui si abbia lunghezza/larghezza $= \sqrt{2}$ si dice talvolta che «soddisfa il rapporto di Lichtenberg», in onore del tedesco Georg Christoph Lichtenberg – che però è vissuto nel XVIII secolo, dunque un po' tardi per un rettangolo utilizzato fin dai tempi antichi.

Come abbiamo potuto constatare quando ormai avevamo scelto, la denominazione più obiettiva è probabilmente quella data dall'italiano Sebastiano Serlio. Questo architetto del XVI secolo parlava infatti di «proporzione diagonale», riferendosi alla procedura per costruire il rettangolo a partire dal quadrato. Nel seguito del libro, dunque, parleremo di «rettangolo diagonale» (anche se la scelta non piacerà agli origamisti, che parlano di «piegatura diagonale» per indicare qualcosa di totalmente diverso).

L'arte diagonale

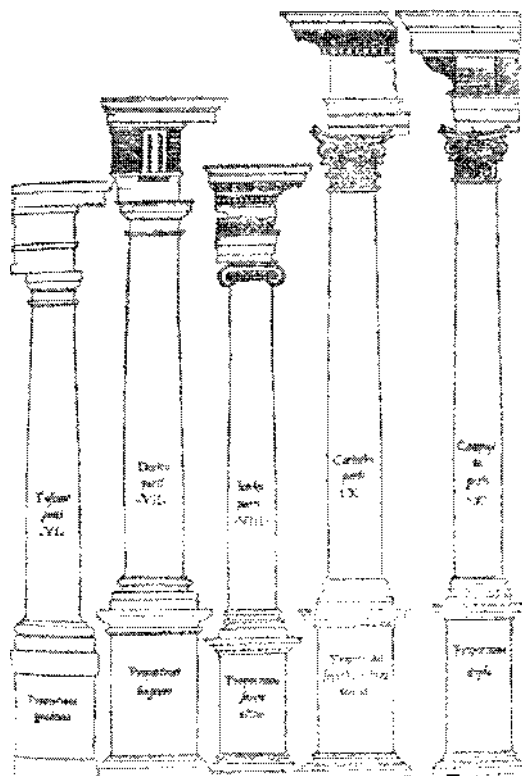
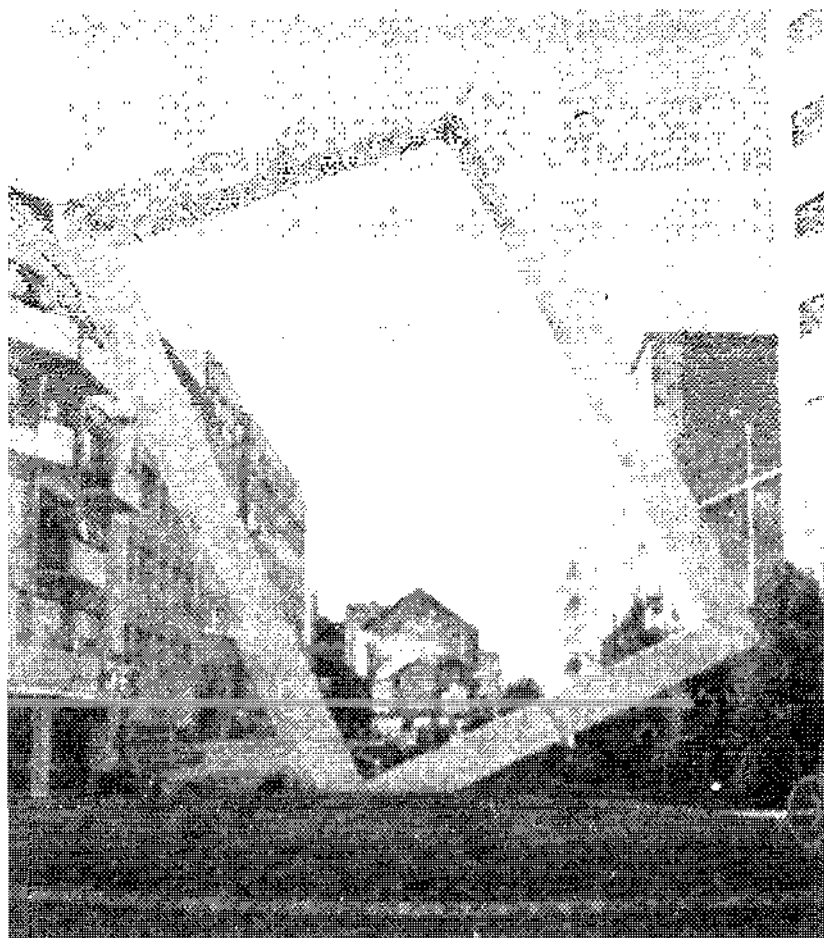
Nella prima grande opera di teoria dell'architettura scritta dopo l'antichità, il *De re aedificatoria*, l'architetto italiano del XV secolo Leon Battista Alberti (vedi cap. 6) pone l'accento sul concetto di rettangolo diagonale. In seguito, l'importanza e l'utilità della diagonale del quadrato continueranno a essere enfatizzate dai più grandi artisti del Rinascimento italiano, come Francesco di Giorgio Martini, o Piero della Francesca che se ne serve per realizzare delle rappresentazioni prospettiche.

Nel XVI secolo, nel capitolo 21 del primo dei suoi *Quattro libri dell'architettura*, l'architetto Andrea Palladio afferma che «le più belle e proporzionate maniere di stanze, e che riescono meglio, sono sette», e che una di queste consiste nel costruire dei rettangoli tali che «la lunghezza loro sarà per la linea diagonale del quadrato della larghezza» (le altre sono il cerchio, il quadrato e i rettangoli in cui il rapporto lunghezza/larghezza vale rispettivamente 4/3, 3/2, 5/3 o 2). Più avanti, nel capitolo 6 del II libro, Palladio descrive così la sua scelta delle dimensioni per l'atrio del convento della Carità a Venezia: «Ho cercato di assimigliar questa casa a quelle degli Antichi: e però ho fatto l'Atrio Corinthio: il quale è lungo per la linea diagonale del quadrato della larghezza».

«I [vani delle porte] più alti sien quelli che ricevono due cerchi, l'un sopra l'altro, e i più bassi abbiano l'altezza della diagonale di quel quadrato che si farebbe della lunghezza della soglia» (Alberti, *De re aedificatoria*, I, 13).

Un architetto rinascimentale che si mostra particolarmente interessato al rettangolo diagonale è Sebastiano Serlio. Nel libro I della sua *Architettura*, Serlio dà la descrizione della duplicazione del quadrato citata da Vitruvio e Platone e riprende figure analoghe a quelle che abbiamo già visto per disegnare degli ottagoni regolari; dopo di che, passa a descrivere la «proporzione diagonale», che viene richiamata in diverse occasioni nel corso del libro IV. Così, seguendo quanto descritto da Leonardo (ma anche dall'Alberti), Serlio ritorna sulla duplicazione del cerchio a partire dal quadrato (e viceversa) per realizzare la base di una colonna dorica, e spiega, tra l'altro, che il piedistallo di una colonna dorica deve avere la forma del rettangolo diagonale, e anche che in una facciata di tipo ionico, «l'altezza [delle finestre] deve essere proporzionata secondo la diagonale» (vedi p. seguente).

Secondo lo storico dell'architettura Rudolf Wittkower, la radice quadrata di 2 è l'unico rapporto irrazionale a essere stato utilizzato con frequenza dagli architetti rinascimentali (contrariamente all'idea per cui questi ultimi avrebbero utilizzato il «numero aureo» – vedi cap. 12). Dato il gran numero di opere che si ispirano a questa epoca, una lista esauriente di tutte quelle in cui compaiono volontariamente i rettangoli diagonali sarebbe molto lunga.

A cavallo tra il XVII e il XIX secolo, il presidente americano Thomas Jefferson, grande estimatore dell'architettura europea, sembra ispirarsi in modo particolare all'opera di Palladio per concepire,

Pianta di un mausoleo antico, secondo Alberti. «E a vicenda mettevano sopra questa muraglia quadrata un'altra tonda, e sopra l'altra tonda un'altra quadrata con il medesimo ordine [...] insino a che ne facevano quattro l'una su l'altra» (*De re aedificatoria*, VIII, 3).

Rappresentazione delle colonne dei differenti ordini architettonici secondo Serlio (*Architettura*, libro IV). La seconda da sinistra, che rappresenta l'ordine dorico, ha il piedestallo in «proporzione diagonale». Il piedistallo della colonna di sinistra (ordine toscano) è quadrato; quelli delle tre colonne di destra sono rettangolari, con rapporti lunghezza/larghezza, da sinistra a destra, uguali a 3/2, 5/3 e 2 (rispettivamente per gli ordini ionico, corinzio e composito).

negli ultimi anni della sua esistenza, l'architettura dell'università della Virginia; nel 1790, inoltre, Jefferson dichiara che i lotti di terra intorno al Campidoglio, a Washington, debbano essere «venduti in porzioni larghe 50 piedi, e con una lunghezza corrispondente alla diagonale del quadrato». Un po' più vicino a noi si trova il rettangolo diagonale sui progetti per il municipio di Tizi Ouzou, in Algeria (realizzato dai coloni francesi del XIX secolo).

Sul piano teorico, oltre a Sérusier di cui abbiamo parlato poco fa, all'inizio del XX secolo l'americano Jay Hambidge sviluppa l'i-

dea di un'estetica particolare legata all'utilizzo dei rettangoli diagonali nel design (e, più in generale, dei rettangoli in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza corrisponde alla radice quadrata di un intero); alcuni artisti contemporanei, come l'americana Elizabeth Whiteley, ne rivendicano l'eredità. Tuttavia è meglio essere molto prudenti nel cercare i rettangoli diagonali nell'arte, per ragioni che vedremo nel capitolo 12.

«Porta di Armonia». Quest'opera monumentale, realizzata dall'artista Michel Ventrone nel 1997, si trova a Annemasse, in Alta Savoia. È costituita da un rettangolo diagonale lungo 9,20 metri e largo 6,50. © Città di Annemasse.

10.

Tra uno e due

La radice quadrata di 2 è un numero compreso tra 1 e 2: ecco un'osservazione assolutamente banale. Eppure $\sqrt{2}$ non si situa in un punto qualunque tra i due interi. Definire con precisione la radice quadrata di 2 rispetto a 1 e a 2 porta a questioni di «mediazione» che hanno interessato architetti, musicisti e fotografi. L'analisi dettagliata dei processi di calcolo della media, tra l'altro, sfocia in considerazioni teoriche di importanza fondamentale per il calcolo di un'approssimazione di $\sqrt{2}$.

Proporzioni architettoniche

Dato che una delle richieste principali che vengono fatte all'architettura riguarda solitamente le proporzioni, non c'è da stupirsi se gli scritti di Vitruvio, di Leon Battista Alberti o di Le Corbusier contengono numerosi riferimenti alla geometria. Gli architetti rinascimentali si dimostrano particolarmente ghiotti di ciò che riguarda la teoria matematica delle proporzioni, grazie alla quale coltivano l'ambizione di far passare la loro disciplina dal livello delle «arti liberali» del *trivium* (architettura, pittura e scultura), considerate inferiori, a quello del *quadrivium*, che comprende geometria, aritmetica, musica e astronomia. A quei tempi, la percezione dei diversi gradi di dignità delle discipline è tale da far giudicare queste ultime come più «nobili». Nella creazione di un legame tra l'architettura e la geometria, quindi, gli architetti vedono un modo per aumentare il proprio prestigio; più inaspettata,

tuttavia, è la loro volontà di legarsi a un'altra disciplina del *quadrivium*: la musica.

Seguendo l'esempio di Vitruvio, gli architetti del Rinascimento si appropriano di un vocabolario appartenente alla teoria matematica della musica, rimediando così all'insufficienza di notazioni matematiche dell'epoca ed elaborando modelli teorici fondati sull'armonia delle proporzioni. Leon Battista Alberti, in particolare, spiega lungamente nel libro IX del suo *De re aedificatoria* i principi per cui è opportuno considerare i numeri e le proporzioni servendosi del vocabolario musicale, non solo per parlare di «accordo» e di «armonia», ma anche per esprimere quelli che noi chiamiamo rapporti: 2/1 è il «diapason» (l'ottava), 3/2 la «diapente» (la quinta), 4/3 la «sesquiterza» (la quarta), e così via. L'idea di fondo, di ispirazione pitagorica, è che esistono proporzioni costitutive dell'armonia universale, pure astrazioni che si incarnano in vari aspetti della nostra realtà.

Questo tipo di appropriazione del vocabolario musicale non è appannaggio esclusivo degli architetti: nel 1618, il grande astronomo danese Giovanni Keplero pubblica un trattato intitolato *L'armonia del mondo*, nel quale presenta una strana visione dell'organizzazione dei pianeti secondo proporzioni che esprime anche lui in termini di toni maggiori, di quarta aumentata o ancora di sesta minore (in particolare, è in questo trattato che troviamo l'enunciato dell'importante terza «legge di Keplero», sulla quale, però, non ci soffermeremo; in tutto il resto dell'opera non c'è nient'altro di valido).

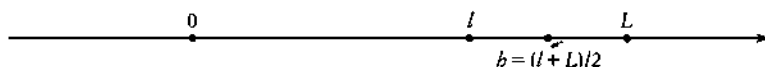
Indipendentemente dal fatto che si tratti di astronomia o di architettura, nella quasi totalità dei casi le proporzioni considerate hanno come elemento in comune la caratteristica di essere rapporti razionali, analogamente a quanto capita nelle teorie musicali dell'epoca. Come viene affermato già negli *Armonici*, un'opera attribuita all'astronomo greco del II secolo Claudio Tolomeo, «la caratteristica della musica è la commensurabilità degli intervalli». È così che, al di là della comodità legata all'uso di lunghezze tutte commensurabili tra di loro per definire il progetto di una costruzione, ci sono anche ragioni teoriche legate all'idea di armonia, che spingono per eliminare dall'architettura i rapporti irrazionali. Nella sua *Armonia del mondo* Keplero non fa nient'altro... ma le cose non vanno sempre per il verso giusto. Così, nel capitolo 4 del libro V,

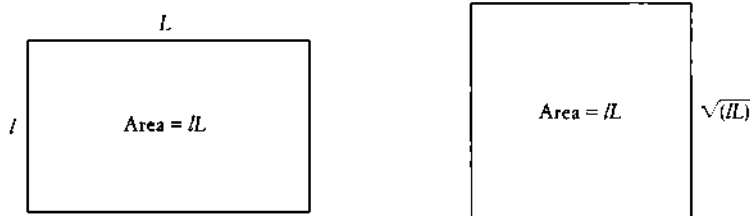
proprio quando l'astronomo imbastisce tutto un discorso sull'idea che i rapporti tra le diverse grandezze astronomiche non siano solo razionali, ma anche «armonici», uno di questi si mostra restio: il rapporto tra l'afelio terrestre (o apogeo: la massima distanza tra la Terra e il Sole) e il perielio venusiano (la distanza minima tra Venere e il Sole) viene associato al rapporto 1018/719 – un'ottima approssimazione – il cui valore è circa 1,415855, un valore che non si avvicina ad alcuna delle proporzioni privilegiate da Keplero. Quest'ultimo finisce per arrendersi: «Rinunciamo a una proporzione armonica», ma fa notare che il rapporto in questione non è lontano da $\sqrt{2}$.

Keplero, tuttavia, non è il primo a fare uno strappo alla regola della commensurabilità. Anche gli architetti rinascimentali lo fanno, e, di fatto, il principale rapporto irrazionale di cui si occupano non è altro che la radice quadrata di 2 (ogni tanto viene evocata anche la radice quadrata di 3, in qualità di rapporto tra la diagonale del cubo e il suo lato, ma non si va molto più in là – vedi cap. 12). Indipendentemente dal fatto che, come vedremo più avanti nel corso del capitolo, nel XVII secolo la stessa musica si è arricchita della possibilità di far ricorso alla radice quadrata di 2, le ragioni principali che hanno spinto gli architetti a utilizzare questa costante irrazionale sono due. La prima è legata a diverse proprietà dei rettangoli diagonali, ovvero quei rettangoli in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è uguale a $\sqrt{2}$. La seconda, che stiamo per vedere in dettaglio, riguarda il problema di trovare una media tra due valori.

Alla ricerca del giusto mezzo

Nel suo *De re aedificatoria*, Leon Battista Alberti si pone la domanda seguente: consideriamo una sala rettangolare le cui dimensioni al suolo (in un'unità di misura qualunque) sono L per la lunghezza e l per la larghezza (dove L e l sono numeri interi scelti in modo tale che al rapporto tra i due sia riconosciuto buon valore estetico). Quali sono, dunque, le scelte più legittime per l'altezza h della sala? Per Alberti, l'altezza deve avere un valore intermedio tra la larghezza e la lunghezza. La questione, perciò, diventa quella di saperlo calcolare correttamente.

Si definisce «mediazione» ogni tecnica di calcolo sistematico che, a partire da due valori l e L, restituisce un valore h compreso tra l e L. Il valore h così ottenuto è una «media» tra l e L; i pitagorici, dal canto loro, parlavano di «medietà» (nella traduzione italiana dell'opera di Alberti, Cosimo Bartoli utilizza il termine «mediocrità», che a noi può suonare un po' strano). La media più comune è quella «aritmetica», data dalla formula $h = (l + L)/2$. Su un asse delle ascisse, l'operazione corrispondente consiste nel determinare il punto a metà strada tra quelli di ascissa l e L.

Che si tratti di ripartire in maniera equa un bene tra due persone, o di dividere un segmento in due parti uguali, è probabile che la media aritmetica sia nota da tempo immemorabile. Per Alberti, «De le tre maniere, le quali i filosofi lodano più che le altri, la mediocre è facilissima a essere trovata, la quale e' chiamano aritmetica».

Oltre al fatto di essere facilmente calcolabile, la media aritmetica ha un altro vantaggio: se le due dimensioni l e L sono commensurabili tra di loro, l'altezza ottenuta facendone la media aritmetica sarà anch'essa commensurabile. Ciò non vale, invece, per un altro tipo di media: la media «geometrica», detta anche «proporzionale», che consiste nel prendere come altezza la radice quadrata del prodotto tra la lunghezza e la larghezza: in altri termini, $h = \sqrt{(Ll)}$. La sua interpretazione geometrica è la seguente: la media geometrica di l e L è la lunghezza del lato del quadrato la cui area è uguale a quella del rettangolo i cui lati sono l e L.

La denominazione di «media proporzionale» si spiega con il fatto che il valore h ottenuto soddisfa la relazione $L/h = h/l$: la parte

occupata da h in L è uguale a quella occupata da l in h, ovvero «la lunghezza più grande supera quella media nello stesso rapporto con cui la media supera la lunghezza più piccola».

In alcuni casi particolari, la media geometrica di due numeri è un numero razionale. È il caso dell'esempio che fa Alberti, che pone $L = 9$ e $l = 4$ così da arrivare a una media geometrica pari a $\sqrt{(9 \times 4)} = \sqrt{36} = 6$. Più frequentemente, tuttavia, la media geometrica di due lunghezze intere o razionali è una lunghezza incommensurabile a quelle da cui deriva. In tal caso, afferma l'architetto seguendo le indicazioni date da Vitruvio per la radice quadrata di 2 (vedi cap. precedente), per ottenere materialmente l'altezza l'approccio geometrico è preferibile a quello aritmetico.

La media proporzionale conferisce alla radice di 2 uno status particolare: $\sqrt{2}$ è la media geometrica tra 1 e 2, un fatto le cui conseguenze pratiche vanno dalla fotografia alla musica, passando per il problema del formato dei fogli di carta (per quest'ultimo punto vedi cap. seguente). Non è escluso che il primo impatto con i numeri irrazionali sia stato una conseguenza dello studio delle medie proporzionali, un concetto noto almeno dai tempi dei pitagorici. Un'eventualità del genere potrebbe essere vista come un elemento a favore dell'idea che la radice quadrata di 2 sia stata il primo numero identificato come irrazionale, visto che la media geometrica più semplice che si possa considerare è indubbiamente quella in cui entrano in gioco i due interi più piccoli, cioè 1 e 2, e che la media geometrica di 1 e 2 è $\sqrt{2}$. Si tratta, comunque, di una congettura molto rischiosa, che non può essere assolutamente considerata come qualcosa di più di una semplice constatazione.

La media geometrica di 1 e 2

Nel capitolo precedente abbiamo visto perché tra le diverse aperture del diaframma di un apparecchio fotografico classico vi sia un rapporto costante, uguale alla radice quadrata di 2: dal momento che l'area di un cerchio varia con il quadrato del suo raggio, la scelta di un rapporto simile consente di ottenere una successione di aree doppie (o dimezzate) le une rispetto alle altre. Ricordiamo che la scala dei fattori è la seguente:

$$1 - 1,4 - 2 - 2,8 - 4 - 5,6 - 8 - 11 - 16...,$$

e la successione di aree corrispondente è questa:

$$k - k/2 - k/4 - k/8 - k/16 - k/32 - k/64 - k/128 - k/256...$$

dove k dipende dalle caratteristiche tecniche dell'apparecchio (ricordiamo anche che il fattore di scala va utilizzato per dividere, e non per moltiplicare).

Per quanto possa andar bene per gli usi più comuni, questa scala non è sempre sufficiente nel caso di lavori fotografici più professionali, che richiedono una gamma di aperture più ampia. Il problema, quindi, è quello di intercalare delle aperture supplementari nella lista precedente. La cosa più logica consiste nel fare una scelta che preservi la proprietà essenziale della successione, cioè che il rapporto tra le aree di due aperture successive resti costante. Nella serie di valori precedente, un'apertura di area a è preceduta da una di area $2a$. L'apertura intermedia, di area b, che può prendere posto tra due aperture di area, rispettivamente, a e $2a$, deve essere scelta in modo tale che il rapporto $2a/b$ sia uguale al rapporto b/a; in altri termini, b deve corrispondere alla media proporzionale di a e $2a$. L'uguaglianza $2a/b = b/a$ può essere riscritta come $b^2/2a^2$, da cui si ottiene $b = \sqrt{2} \cdot a$.

Inserendo tra i termini adiacenti della nostra scala di aperture i valori suggeriti dal calcolo precedente otteniamo questa nuova lista di aree (ordinate, come prima, in modo decrescente):

$$k - k/\sqrt{2} - k/2 - k/(2\sqrt{2}) - k/(4) - k/(4\sqrt{2}) - k/8 - k/(8\sqrt{2}) - \\ - k/16 - k/(16\sqrt{2})...$$

cui corrisponde la seguente lista di aperture (questa volta in ordine crescente):

$$1 - \sqrt{\sqrt{2}} - \sqrt{2} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} - 2 - 2\sqrt{\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{2}} - 4...,$$

formata da potenze successive della radice quarta di 2 (la radice quadrata della radice quadrata di 2). In certe macchine fotografiche la sequenza delle aperture è data dai valori approssimati di tali potenze.

Per avere a disposizione un numero di aperture ancora più grande si possono inserire tra due valori successivi della prima lista non più uno, ma due valori supplementari. Date due aperture di area,

rispettivamente, a e $2a$, si tratta quindi di trovare due aperture intermedie, b e c, tali che i tre rapporti b/a, c/b e $2a/b$ siano uguali: è il problema della ricerca di una «doppia media proporzionale». Si può dimostrare che i valori corretti sono $b = \sqrt[3]{2} \cdot a$ e $c = (\sqrt[3]{2})^2 \cdot a$ (l'espressione $(\sqrt[3]{2})^2$ corrisponde al quadrato della radice cubica di 2). Alcuni apparecchi professionali dispongono della lista di aperture corrispondente a quest'ultimo calcolo. È interessante notare come ci si riallacci al calcolo della duplicazione del cubo (vedi cap. precedente), dove si ha ugualmente a che fare con la radice cubica di 2. Gli antichi Greci ci hanno lasciato due soluzioni al problema di come tracciare un segmento di lunghezza $\sqrt[3]{2}$ a partire da un segmento di lunghezza unitaria. I due metodi furono scoperti nel IV secolo a. C., rispettivamente da Archita di Taranto – che utilizzò le superfici nello spazio – e da Menecmo – che si servì delle «sezioni coniche». Non li esamineremo in dettaglio, limitandoci a osservare che entrambi si ispirano a un'idea attribuita a Ippocrate di Chio, vissuto tra il V e il IV secolo a. C. (da non confondersi con il medico Ippocrate di Cos), che consiste appunto nell'osservare che il problema della duplicazione del cubo si riconduce alla ricerca di una rappresentazione geometrica della doppia media proporzionale di 1 e 2.

La scala a temperamento equabile

Nel capitolo 4 abbiamo affrontato i problemi legati alla costruzione di una scala musicale. Come venne scoperto dai pitagorici, non è possibile costruire una scala completa in cui tutti gli intervalli siano uguali e ogni nota sia l'armonica di un'altra. Le molte scale utilizzate in tutto il mondo sono tutte soluzioni di compromesso per definire gli intervalli tra le note. In particolare, nel XVI secolo il teorico e compositore italiano Gioseffo Zarlino sostituisce la scala pitagorica con una formata da 12 note costruite sui rapporti armonici 2, 3 e 5 (mentre la scala pitagorica si limitava a 2 e 3).

Nel 1691, il tedesco Andreas Werckmeister mette in pratica l'idea che consiste nel partire non più dai rapporti armonici per avvicinarsi più che si può a una scala in cui tutti gli intervalli siano uguali, bensì da intervalli uguali concepiti in modo da avvicinarsi

a dei suoni armonici. Si parla così di «scala ben temperata», una scala che presenta il grande vantaggio di consentire la trasposizione (cioè, per esempio, suonare un brano cambiando tutte le note di un tono). Werckmeister comincia dalla definizione di due note estreme separate da un'ottava, cioè caratterizzate da frequenze il cui rapporto è uguale a 2. Dopo di che, decide di introdurre undici note intermedie – tante quante nella scala pitagorica e in quella zarliniana. Per definirne le frequenze utilizza, logicamente, le medie proporzionali. La matematica è la stessa di quella che abbiamo già visto nel caso delle macchine fotografiche e della duplicazione del cubo, con l'unica differenza che qui non si tratta più di una doppia media proporzionale, che consente di inserire due valori, ma di una media proporzionale «undecupla», che consente di inserirne undici. Se r è il rapporto comune tra le frequenze associate a note consecutive, si può dimostrare che deve valere la relazione $r^{12} = 2$, cioè che r è la radice dodicesima di 2. Una scala a temperamento equabile, dunque, è formata da note le cui frequenze sono:

$$f, (\sqrt[12]{2})f, (\sqrt[12]{2})^2 f, (\sqrt[12]{2})^3 f, (\sqrt[12]{2})^4 f, (\sqrt[12]{2})^5 f, (\sqrt[12]{2})^6 f, (\sqrt[12]{2})^7 f, (\sqrt[12]{2})^8 f, (\sqrt[12]{2})^9 f, (\sqrt[12]{2})^{10} f, (\sqrt[12]{2})^{11} f, 2f.$$

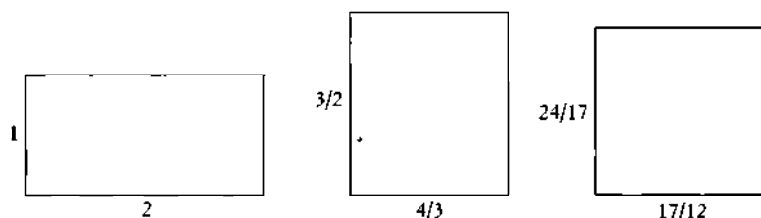
Ad esempio, prendiamo per f il *do3* (cioè 264 Hz; in realtà la nota di riferimento è il *la3*, cioè 440 Hz). I rapporti tra le frequenze associate alle note che seguono quella di riferimento sono elencati nella tabella seguente:

do	*do#*	*re*	*re#*	*mi*	*fa*	*fa#*	*sol*	*sol#*	*la*	*la#*	*si*	*do*
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[6]{2}$	$\sqrt[4]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[12]{2})^5$	$\sqrt{2}$	$(\sqrt[12]{2})^7$	$(\sqrt[3]{2})^2$	$(\sqrt[4]{2})^3$	$(\sqrt[6]{2})^5$	$(\sqrt[12]{2})^{11}$	2

I problemi che si incontrano proseguendo su questo terreno non hanno risposte immediate, e richiedono l'utilizzo dello strumento matematico dei «logaritmi» (vedi cap. 13); questo, storicamente, ha complicato il lavoro dei musicisti, che non erano tutti ugualmente dotati per la matematica: secondo quanto racconta il matematico Gaspard de Prony nel suo trattato sull'argomento, all'inizio del XIX secolo si sentiva ancora la necessità di un'esposizione elementare delle tecniche matematiche in gioco.

Sembra che Johann Sebastian Bach sia stato uno dei primi a servirsi della scala a temperamento equabile, in alcune delle sue com-

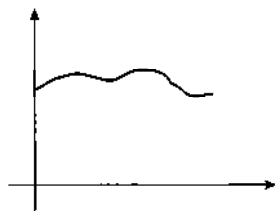
posizioni per clavicembalo. Oggi la scala temperata è diffusa in tutta la musica occidentale, e ci fa «ascoltare» la radice quadrata di 2 nei rapporti tra le frequenze, ad esempio ogni volta che a un *do* segue un *fa#*.

Il calcolo di un tasso di interesse pone problemi matematici che erano già noti ai Babilonesi. Sulla tavoletta AO 6770 (Antichità Orientali), conservata al Museo del Louvre a Parigi, troviamo infatti la domanda seguente: un capitale di 1 unità monetaria (la «mina») è investito a un tasso di interesse annuo del 20%. Quand'è che il capitale sarà raddoppiato? Il metodo descritto nella tavoletta consiste nel calcolare gli interessi successivi al termine di un anno, due anni ecc., fino ad arrivare a un ammontare maggiore di 2 (nel caso specifico, al termine del quarto anno). Il numero dei giorni, tra il terzo e il quarto anno, al termine dei quali il capitale sarà esattamente maggiore di 2 si ottiene, in linea di principio, mediante un calcolo analogo a quello della scala di Werckmeister (si possono far corrispondere alle dodici note i dodici mesi dell'anno). In realtà il Babilonese procede in un altro modo, accontentandosi di un calcolo approssimato ottenuto con una media aritmetica, che è nettamente più semplice da calcolare e che, per ragioni tecniche legate ai dati specifici del problema, permette di valutare correttamente il risultato.

La danza delle medie

I pitagorici si sono interessati anche ad altre medie, diverse da quella aritmetica e da quella geometrica. Tra tutte, solo una si è rivelata altrettanto utile e ricca di implicazioni: la media «armonica». Questa, che inizialmente era stata battezzata «subcontraria», consiste nel prendere come valor medio di a e b il valore m definito dalla formula:

$$m = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

È probabile che sia stato Archita a ribattezzare armonica questa terza varietà di media. La ragione sarebbe da ricercare nel fatto che (in termini moderni) la media armonica di 1 e 2 vale 4/3 e che la successione 1 – 4/3 – 2, vista come successione di frequenze, definisce gli intervalli fondamentali della scala pitagorica: l'ottava (tra 1 e 2, rapporto 2/1), la quarta (tra 1 e 4/3, rapporto 4/3), e la quinta (tra 4/3 e 2, rapporto 2/(4/3) = 3/2).

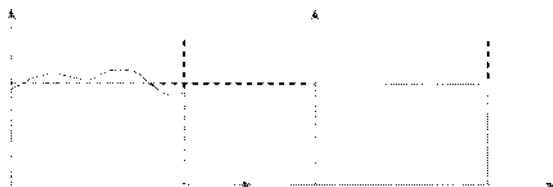
Dall'osservazione seguente possiamo dedurre il legame molto stretto tra le medie aritmetica, geometrica e armonica: dati due numeri a e b, il prodotto della loro media aritmetica e di quella armonica è pari ad ab (lasciamo al lettore il compito, molto semplice, di verificare con il calcolo). Per dare una versione geometrica di questa proprietà, prendiamo $a = 1$ e $b = 2$, e costruiamo un rettangolo con i lati uguali ad a e b: la sua area, dunque, è pari a ab. A fianco, costruiamo un secondo rettangolo, i cui lati, stavolta, sono uguali a 3/2 e 4/3, rispettivamente la media aritmetica e quella armonica di 1 e 2: per quanto si è detto, anche l'area di questo secondo rettangolo è uguale a 2 (possiamo verificarlo immediatamente moltiplicando 3/2 per 4/3). Ripetiamo quindi l'operazione a partire dal nuovo rettangolo: la media aritmetica di 3/2 e 4/3 vale 17/12, mentre la loro media armonica vale 24/17; il prodotto dei due numeri, pari all'area del terzo rettangolo, è di nuovo uguale a 2. E si ricomincia, ogni volta allo stesso modo.

Questo modo di calcolare le radici quadrate è attribuito solitamente ai Babilonesi (per i quali aveva una forma diversa), ed è stato anche chiamato «musicale» (e attribuito ad Archita) a causa del ricorso alla media armonica. Vi ritorneremo nel corso del capitolo 14, analizzando in che modo lo si può perfezionare per calcolare le cifre decimali di $\sqrt{2}$; il metodo «aritmetico-armonico» di cui sopra, inoltre, troverà un'eco nel capitolo 15, dove sarà sostituito da un

metodo «aritmetico-geometrico» che stabilisce un legame tanto stretto quanto inatteso tra la radice quadrata di 2 e il numero pi greco.

Sull'efficacia di $\sqrt{2}$

Ogni tecnica di mediazione – sia essa aritmetica, geometrica o armonica – consiste nel «riassumere» più valori in uno solo. Il metodo funziona anche per più di due valori: la media aritmetica di a, b e c è definita come $(a + b + c)/3$, quella geometrica come $\sqrt[3]{(abc)}$ e quella armonica come $3/(1/a + 1/b + 1/c)$. In modo analogo si stabiliscono le medie aritmetica, geometrica e armonica per quattro o più valori.

Questo tipo di tecnica è utilizzato molto spesso nelle scienze fisiche, dove molti dati sperimentali sono ottenuti calcolando dei valori medi. Ora, capita spesso che il numero dei dati coinvolti sia *infinito*. Ad esempio, consideriamo la curva seguente (di solito si preferisce parlare di «funzione»), che rappresenta un fenomeno fisico qualsiasi: l'evoluzione di una temperatura in funzione del tempo, la quantità di luce catturata in funzione della distanza di una sorgente di luce, o altro ancora.

Che significato va dato al «valor medio» del fenomeno? Rappresentiamo la curva precedente come la cima di un'onda prigioniera di un recipiente: quest'ultimo è delimitato dall'asse delle ascisse, da quello delle ordinate e dalla retta verticale tratteggiata. Aspettiamo che il vento si calmi: quando la situazione si è stabilizzata, il livello dell'acqua definisce l'altezza media della curva iniziale. Moltiplicando tale valore per la larghezza del recipiente si ottiene un valore che corrisponde all'area totale occupata dall'onda: è «l'integrale» della funzione.

Si tratta di una generalizzazione del concetto di media aritmetica alle funzioni (che non staremo a dimostrare; si può notare, poi, che anche la media geometrica e quella armonica si estendono alle funzioni, ma la cosa presenta meno aspetti interessanti).

Una delle innumerevoli situazioni fisiche in cui interviene un integrale è quella di un circuito elettrico composto da una lampadina e da un generatore che fornisce una corrente elettrica di intensità i. Per le leggi dell'elettricità, l'energia assorbita in un secondo dalla lampadina (e restituita da quest'ultima sotto forma di luce) è proporzionale al quadrato dell'intensità, e il fattore di proporzionalità tra le due quantità è una costante R detta resistenza della lampadina. Perciò, se l'intensità fornita dal generatore è costante, cioè se la corrente è «continua», il valore dell'energia può essere determinato senza problemi, ed è pari, in un secondo, a Ri^2. Quando l'intensità i fornita dal generatore dipende dall'istante t, invece, la faccenda si complica. Una situazione frequente è quella di una corrente sinusoidale, per la quale l'intensità all'istante t si scrive in una forma del tipo $i(t) = I\cos(\pi t)$: in tal caso si parla di «corrente alternata» (per una definizione di $\cos(t)$ vedi cap. 13). L'intensità oscilla periodicamente tra i valori estremi I (a $t = 0, 2, 4, 6, \ldots$ secondi) e $-I$ (a $t = 1, 3, 5, 7, \ldots$), e il suo segno indica il senso in cui circola la corrente.

Come determinare, in queste nuove condizioni, la quantità di energia assorbita dalla lampadina in un secondo? La risposta proviene dal calcolo del valor medio – m – del quadrato dell'intensità, vale a dire, in termini più moderni, dal calcolo dell'integrale di $(i(t))^2$. L'idea consiste nell'osservare (e dimostrare) che la quantità di energia assorbita sarebbe la stessa se, invece di variare, il valore di $(i(t))^2$ rimanesse costante e uguale al suo valor medio m. Quest'ultimo, dato dall'integrale della funzione che fa corrispondere a ogni istante t compreso tra 0 e 1 il valore $(i(t))^2 = I^2\cos^2(\pi t)$, si cal-

cola con tecniche che oggi sono divenute classiche. Non abbiamo spazio per entrare nei dettagli, e dunque ci limiteremo a dare il risultato: $m = I^2/2$. L'energia assorbita dalla lampadina in un secondo, dunque, è pari a Rm, cioè $RI^2/2$.

Si definisce «intensità efficace», e la si indica con I_{eff}, l'intensità di una corrente continua (cioè di intensità costante, senza oscillazioni) che dia alla lampadina la stessa quantità di energia per unità di tempo. Il valore di I_{eff} si determina attraverso l'uguaglianza $RI_{eff} = RI^2/2$ (a sinistra: l'energia per unità di tempo nel caso di una corrente continua di intensità I_{eff}; a destra: l'energia per unità di tempo nel caso della nostra corrente alternata). Un semplice calcolo dimostra che $I_{eff} = I/\sqrt{2}$.

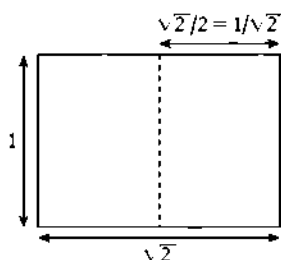
Una versione «efficace» esiste anche per altre grandezze relative all'elettricità, come la differenza di potenziale o la forza elettromotrice: per calcolarla, si utilizza sempre il fattore $\sqrt{2}$. Partendo da quanto si è appena detto, si può verificare che, nella relazione $I_{eff} = I/\sqrt{2}$ (così come in tutte quelle corrispondenti per le altre grandezze elettriche), l'inverso della radice quadrata di 2 interviene in qualità di «media quadratica del coseno», cioè come radice quadrata dell'integrale del quadrato della funzione coseno.

Nella pratica, gli apparecchi di misura (amperometri, voltmetri) indicano i valori efficaci delle grandezze. Se un apparecchio elettrico è sottoposto a una corrente alternata sinusoidale, quindi, per sapere se c'è un rischio di sovratensione non bisogna considerare la tensione U_{eff} indicata da un voltmetro, ma quella, U, che si ottiene moltiplicando U_{eff} per $\sqrt{2}$, e che corrisponde alla tensione massima raggiungibile in regime sinusoidale.

11.

Il doppio del proprio inverso

Nel capitolo 9 abbiamo chiamato «rettangoli diagonali» quei rettangoli in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è uguale a $\sqrt{2}$, e abbiamo visto come Vitruvio li costruisse a partire dalla diagonale del quadrato. In questo capitolo ci dedicheremo a definire il rettangolo diagonale in maniera diversa, sebbene equivalente. La nuova definizione, anch'essa di natura geometrica, è all'origine dell'utilizzo ormai quotidiano e universalmente accettato del rettangolo diagonale come formato standard dei fogli di carta.

Quando si piega in due un rettangolo diagonale nel senso della lunghezza, si ottengono due rettangoli identici più piccoli, anche loro diagonali.

Questa proprietà dei rettangoli diagonali è di facile dimostrazione, ed è altrettanto semplice verificare che $\sqrt{2}$ è l'unico rapporto per cui la piegatura dà origine a due rettangoli più piccoli di proporzioni identiche a quelle del rettangolo di partenza. Se indichiamo rispettivamente con L e l la lunghezza e la larghezza del nostro primo rettangolo, la lunghezza di uno dei rettangoli più piccoli è l,

mentre la sua larghezza è $L/2$. Si tratta quindi di determinare il valore del rapporto $r = L/l$ tale che sia $L/l = l/(L/2)$, ovvero $L/l = 2l/L$, da cui si ricava $r = 2/r$. Perciò $r^2 = 2$, e $r = \sqrt{2}$. Questa proprietà geometrica è una manifestazione del fatto che la radice quadrata di 2 è l'unico numero (positivo) che coincide con il doppio del proprio inverso, il che equivale a dire che $\sqrt{2}$ è l'unica soluzione dell'equazione $r = 2 \times (1/r)$. La proprietà che lega $\sqrt{2}$ ai rettangoli diagonali può anche essere espressa in termini di media, notando che l'equazione $r = 2/r$ equivale a $r/1 = 2/r$, ossia che r è la media geometrica di 1 e 2 (vedi cap. precedente).

Apriamo una parentesi per osservare che invece di assegnare al lato del quadrato della tavoletta babilonese YBC 7289 (vedi cap. 1) il valore 30, come si fa quasi sempre, lo si potrebbe prendere uguale a 1/2, come hanno proposto gli storici Eleanor Robson e David Fowler. In tal modo si otterrebbe una diagonale pari a $\sqrt{2}/2$, cioè $1/\sqrt{2}$ (il calcolo è immediato), e così la tavoletta legherebbe la radice quadrata di 2 al suo inverso. Se così fosse, il valore della diagonale dato dalla tavoletta non dovrebbe leggersi 42;25,35, bensì 0;42,25,35, vale a dire la miglior stima possibile dell'inverso di $\sqrt{2}$ su tre ordini di grandezza sessagesimali.

Tra gli usi potenziali della proprietà dei rettangoli diagonali, segnaliamo quella di un campo sportivo facile da dividere in due parti in «scala ridotta», più adatte a piccole squadre; pensiamo in particolare al calcio, in cui una variante utilizzata per i settori giovanili è quella in cui le squadre che si affrontano sono formate da sette giocatori anziché undici (le norme per i campi da calcio sono elastiche, e rendono possibile il ricorso a rettangoli diagonali; tuttavia non sappiamo se l'idea sia già stata sfruttata). L'utilizzo più spettacolare dei rettangoli diagonali, però, è senza dubbio quello legato al formato dei nostri fogli di carta.

La storia del formato dei fogli di carta

Il formato 21 × 29,7 che attualmente costituisce la norma in molti paesi (con l'eccezione notevole di quelli nordamericani) è stato concepito con l'obiettivo di soddisfare la definizione di rettangolo diagonale che abbiamo dato poco fa: piegando in due un foglio

nel senso della lunghezza, se ne ottengono due più piccoli, in cui il rapporto delle dimensioni è uguale a quello del foglio di partenza.

Sembra che la prima testimonianza scritta della possibilità di utilizzare questa regola geometrica per definire il formato dei fogli di carta sia da attribuirsi al tedesco Georg Cristoph Lichtenberg, scienziato e pensatore del XVIII secolo. In una lettera del 25 ottobre 1786 indirizzata a Johann Beckmann, Lichtenberg afferma di aver assegnato a un giovane inglese l'esercizio seguente: determinare le dimensioni di un foglio di carta affinché quest'ultimo sia un rettangolo diagonale. «Avendo trovato il valore di tale rapporto», scrive Lichtenberg, «volli applicarlo a un foglio di carta ordinaria servendomi delle forbici, e constatai con piacere che esso possedeva già quel rapporto». Lichtenberg aggiunge che è proprio su quel foglio di carta che sta scrivendo la lettera, e che «il lato corto del rettangolo deve stare al grande come $1:\sqrt{2}$, ovvero come il lato del quadrato sta alla sua diagonale». Infine domanda a Beckmann se gli risulti che l'esistenza di quel rapporto nel foglio su cui sta scrivendo sia frutto di una scelta consapevole da parte del fabbricante o se si tratti semplicemente di un caso (non si sa quale sia stata la risposta).

I primi tentativi di dare valore legale a questo tipo di formato hanno luogo sullo sfondo della Rivoluzione francese e dei progetti di realizzazione di un catasto destinato alla riscossione dell'imposta fondiaria. I lavori del Comitato delle Finanze si svolgono con l'aiuto del direttore generale del catasto, Gaspard de Prony (vedi cap. precedente). Quest'ultimo propone di ricorrere al rettangolo diagonale, e il 21 agosto 1792 il deputato del dipartimento di Seine-et-Marne Jean-Baptiste-Moïse Jollivet illustra all'Assemblea legislativa nazionale le ragioni che giustificano l'adozione di quel tipo di formato. Quello stesso giorno viene presentato all'Assemblea un rapporto dell'Accademia delle Scienze sulla determinazione della misura di un'altra norma dal destino illustre: quella del metro campione.

L'elaborazione del catasto è una delle ragioni principali del progetto di riforma, tanto per il metro quanto per i formati della carta. Trattandosi del catasto, il problema del formato non è legato a questioni di scala (non vi erano ragioni particolari per cui la scala dei piani catastali dovesse essere legata alla forma della carta sulla

quale erano realizzati), ma a un obiettivo di razionalizzazione e di uniformazione nell'ambito di quello che si annuncia come un progetto di grandissima portata. Dopo un lungo periodo di tergiversazioni, la realizzazione del catasto vedrà infine la luce, per iniziativa di Napoleone, nel 1807, con uno spirito e una forma che del resto sono ancora attuali. Il formato dei piani catastali è quello detto «grand aigle», cioè 105 × 75 cm, quasi un rettangolo diagonale senza esserlo realmente (negli ultimi anni, l'informatizzazione del catasto ha reso alquanto obsoleto l'uso di una norma per il formato dei piani cartacei).

Torniamo alla Rivoluzione, e al 21 agosto 1792. Le ragioni portate a favore dell'adozione del rettangolo diagonale come formato riguardano soprattutto esigenze di economia e di semplificazione dei calcoli. «[...] quale deve essere la proporzione tra le due dimensioni del foglio, l'altezza e la larghezza?» domanda il deputato. Dopo aver illustrato perché «un lungo uso ha proscritto la forma interamente quadrata», egli prosegue spiegando che sotto Luigi XIV era stato abbozzata una prima normalizzazione dei formati, ma il risultato non era stato soddisfacente «perché il ministero e i suoi agenti si sono avvicinati al principio senza comprenderlo, [e] gli stessi fabbricanti, anche se lo avevano scoperto, non potevano opporsi apertamente a una decisione ministeriale». A questo punto fa il suo ingresso nel discorso la proprietà matematica attesa: «[...] esiste solo una [forma] che soddisfa totalmente le condizioni del problema, quella per cui la larghezza del foglio è media proporzionale tra l'altezza del foglio e la metà di quella stessa altezza».

Jollivet non cita mai esplicitamente la radice quadrata di 2, e pone il problema nella forma seguente: fissata l'altezza H del foglio, la larghezza corretta è data da quel valore x tale che $H/x = x/(H/2)$ (cioè, in altri termini, $x = H/\sqrt{2}$). Il principio, però, è stabilito, e con esso la sua giustificazione principale: dividere in due un rettangolo diagonale genera due rettangoli a loro volta diagonali. Il vantaggio più evidente sta nel fatto che una norma del genere limita le perdite e facilita la produzione della carta, consentendo anche di ridurre lo spazio necessario alla conservazione dei documenti.

Siamo nel periodo della Rivoluzione, e il formato del rettangolo diagonale soddisfa un'ulteriore esigenza di natura fiscale: fissare in

maniera equa le tasse da applicare in occasione della redazione di diversi documenti, come gli atti giudiziari. Sembra ragionevole e oggettivo, infatti, fissare il prezzo del bollo di un atto in funzione della taglia necessaria alla sua redazione. Le aree dei vari formati in vigore a quei tempi non davano origine a rapporti semplici, e dunque i prezzi dei vari bolli mancavano di coerenza. Con i rettangoli diagonali tutto sarebbe stato più facile.

Malgrado le raccomandazioni formulate da Jollivet, che si spinge persino a proporre esplicitamente le dimensioni (i suoi formati, che egli chiama A, B, C, a, b e c, corrispondono rispettivamente ai nostri B1, B2, B3, A1, A2 e A3 – si veda oltre per la loro definizione), i formati indicati nelle «leggi sui bolli» promulgate un anno dopo l'altro per modificare le tariffe dei bolli restano invariati. D'altro canto bisognerà aspettare la legge del 14 termidoro dell'anno IV (31 luglio 1796) perché i formati non siano più espressi in pollici ma in centimetri.

Infine, il «Bollettino delle Leggi della Repubblica» del 13 brumaio dell'anno VII della Repubblica (3 novembre 1798) promulga una nuova legge sui bolli (si veda l'appendice) che tiene finalmente conto dell'interesse dei rettangoli diagonali. Il formato «grande registro» corrisponde ormai al nostro formato A2, il «foglio medio» al formato A3, e i formati «gran foglio», «piccolo foglio» e «mezzo foglio», rispettivamente, ai formati B3, B4 e B5. Sfortunatamente, una così brillante modernizzazione non conosce lo stesso successo di altre innovazioni fondamentali ugualmente concepite durante la Rivoluzione francese, come il metro e il chilogrammo. Spazzate via dal corso della Storia come il calendario repubblicano, le norme non vengono mai applicate. Il formato stesso del «Bollettino» sul quale viene promulgata la famosa legge misura all'incirca 11,9 cm di larghezza e 18,2 di lunghezza: niente a che vedere con un rettangolo diagonale.

Dimenticata rapidamente in Francia, l'idea di una norma sui formati ricompare in Germania, una prima volta nel XIX secolo con il chimico Wilhelm Ostwald, e poi all'inizio del XX secolo ad opera dell'ingegnere berlinese Walter Porstmann. Nel 1922 si arriva all'adozione della norma DIN 476 (Deutsche Institut für Normung), che definisce il formato A0 come un rettangolo con una superficie di 1 m^2 e con un rapporto tra la lunghezza e la larghezza pari a $\sqrt{2}$.

Il formato A1 si ottiene dividendo un rettangolo di formato A0 nel senso della lunghezza, così da ottenere due rettangoli uguali; dividendo nuovamente uno di questi secondo lo stesso principio si ottiene il formato A2, poi il formato A3, e così via. Il formato A4 corrisponde a un rettangolo la cui larghezza è di 21,0 cm e la cui lunghezza è di 29,7 cm. La norma segue le raccomandazioni di Porstmann. Ostwald, dal canto suo, aveva scelto di definire i suoi formati a partire da un piccolo rettangolo di dimensioni 1 cm per 1,41 cm; ai formati più grandi si arrivava per duplicazioni successive.

La norma tedesca si è imposta rapidamente quasi ovunque: il Belgio l'ha adottata nel 1924, imitato negli anni successivi da un gran numero di paesi di tutto il mondo, dall'Unione Sovietica nel 1934 all'India nel 1957, passando per l'Australia nel 1974. In Francia, dopo l'esperienza sfortunata della Rivoluzione, la norma è stata reintrodotta nel 1967. Dal 1975 il formato costituisce una norma internazionale, definita dal numero ISO 216 (International Organization for Standardization). La sua diffusione in ogni parte del mondo farebbe felice Lichtenberg, il quale, più di due secoli fa, compose questo aforisma, senza sapere che avrebbe potuto applicarlo a se stesso: «Sforzati di non appartenere al tuo tempo».

I meriti di A4... e degli altri

La norma attuale sui formati dei fogli presenta una serie di vantaggi. In particolare, dato che la superficie di ogni formato è la metà di quella del formato immediatamente superiore, se ne può dedurre un metodo semplice per valutare la massa di un libro o di un foglio di carta, il che è particolarmente utile per le spedizioni postali. La carta di qualità comune, ad esempio, ha una massa per unità di superficie di 80 g/m^2, e dunque un foglio A0 di carta comune pesa 80 grammi; di conseguenza, un foglio di formato A4, 16 volte più leggero, pesa 80/16 = 5 *g*.

La comparsa delle macchine fotocopiatrici ha reso ancora più evidente l'utilità del rettangolo diagonale come formato di riferimento. Talvolta, infatti, si può aver bisogno di fotocopiare un documento modificandone le dimensioni, sia per aumentarle sia per diminuirle. Affinché il cambio di dimensioni non alteri la forma del

documento nel suo nuovo formato, bisogna che la riduzione sia la stessa in larghezza e in lunghezza, altrimenti si introdurrebbero delle distorsioni: ad esempio, le lettere di un testo diventerebbero, in proporzione, troppo larghe o troppo alte. Occorre dunque che i formati stessi della carta seguano questa regola, ed è il caso dei formati della serie A. La maggior parte delle fotocopiatrici moderne permette di cambiare formato secondo vari fattori di scala, tra cui il fattore 141% che corrisponde a $\sqrt{2}$ e che permette di passare dal formato An al formato A$(n-1)$. Il fattore 71% corrisponde alla riduzione dal formato An a quello A$(n+1)$ e corrisponde a $1/\sqrt{2}$ ($\approx 0{,}707$).

Per far sì che gli ingrandimenti e le riduzioni siano realizzati modificando lo spessore delle linee in modo coerente, anche la taglia delle matite per il disegno tecnico è normalizzata (la norma è la ISO 9175-1) in modo tale che i rapporti tra termini consecutivi della serie sono vicini a $\sqrt{2}$; la sequenza, espressa in millimetri, è la seguente: 0,13 – 0,18 – 0,25 – 0,35 – 0,50 – 0,70 – 1,00 – 1,40 – 2,00.

Si noti, invece, che per le dimensioni e lo spessore dei caratteri utilizzati nei software di scrittura non si è ancora giunti a una normalizzazione. Come ha osservato l'informatico Markus Kuhn, gli autori di quei programmi, per lo più americani, ignorano i vantaggi del formato A4 e dei suoi derivati; la loro capacità di imporre, di fatto, le proprie convenzioni, anche se poco coerenti, può addirittura far temere che alla fine non sarà il sistema migliore a imporsi. L'importanza di una controversia di questo tipo non va sottovalutata.

I formati della serie A non consentono, da soli, di far fronte a tutte le esigenze di ordine pratico. Anzitutto, è possibile che ci sia bisogno di utilizzare fogli più grandi di quelli di formato A0. A tale scopo sono stati definiti i formati 2A0 e 4A0, che corrispondono a quelli che potremmo anche indicare con «A(− 1)» e «A(− 2)». Si tratta di rettangoli diagonali con area pari a 2 m^2 per il 2A0 e 4 m^2 per il 4A0.

Per poter disporre di una più grande varietà di formati sono state definite altre norme complementari, in particolare per l'editoria e la burotica: i principali sono quelli delle serie B e C (ne esistono anche altri, ad esempio in Giappone). I rettangoli della serie B, utilizzati in particolar modo per libri e giornali, sono rettangoli diagonali costruiti per divisioni successive, proprio come nel caso

della serie A. La differenza tra le due serie sta nel fatto che le dimensioni del formato B0 sono di 1000 × 1414 millimetri (mentre il formato A0 ha dimensioni 841 × 1189). La scelta di una larghezza di 1000 mm per il formato B0 ha una conseguenza, che il lettore potrà dimostrare: la lunghezza del rettangolo corrispondente al formato Bn è uguale alla media geometrica tra quella del formato An e quella del formato A(n − 1), e la stessa cosa vale per la larghezza. Perciò il fattore di scala da applicare, ad esempio, per fotocopiare un originale in formato A4 e ottenere una copia in formato B4 è lo stesso che si ha quando si passa da B4 ad A3. Si può dimostrare con un semplice calcolo che il fattore in questione è pari a $\sqrt{\sqrt{2}}$, la radice quarta di 2, che vale all'incirca 1,19 (su certe fotocopiatrici troviamo il fattore 119%, così come il suo inverso, 84%). Si noti che il valore $\sqrt{\sqrt{2}}$ corrisponde anche alla lunghezza del rettangolo A0.

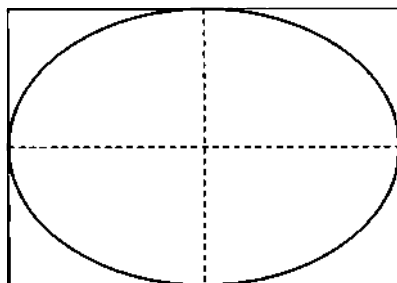
Per quanto riguarda le dimensioni dei rettangoli della serie C, possiamo dedurle da quelle delle serie A e B nel modo seguente: la lunghezza del rettangolo di formato Cn corrisponde alla media geometrica tra quella del formato An e quella del formato Bn (stessa cosa per la larghezza). Anche i formati della serie C, dunque, corrispondono a dei rettangoli diagonali. La serie C è utilizzata in particolar modo per definire le dimensioni delle buste. Il formato C4 corrisponde alle buste «gran formato», il formato C5 a quelle «metà formato». Quanto al formato C6, le cui dimensioni sono di 114 × 162 millimetri, si tratta di quello delle buste di uso comune, in cui entra perfettamente un rettangolo di formato A6 – lo stesso formato che si ottiene piegando in quattro un foglio A4.

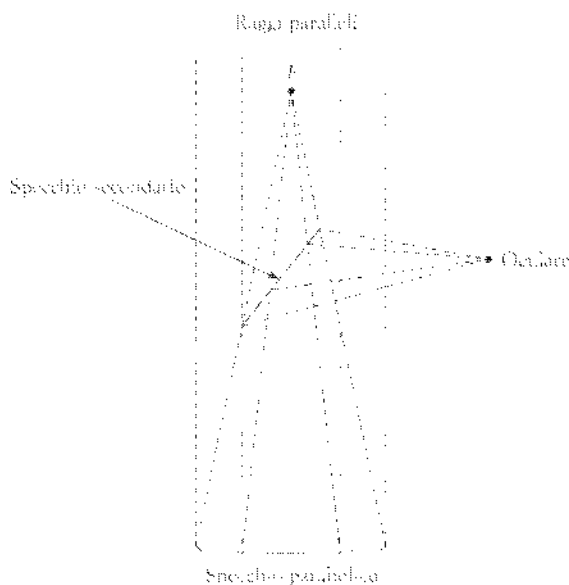
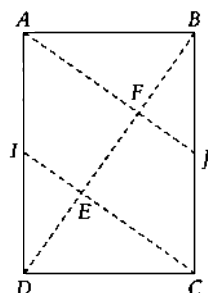
Questa varietà di formati consente di rispondere alla maggior parte delle esigenze della vita di tutti i giorni, ma ne esistono ovviamente molti altri, ben lungi dall'essere tutti rettangoli diagonali. Nell'editoria, ad esempio, considerazioni estetiche unite alla necessità di distinguersi portano all'utilizzo di formati molto diversi.

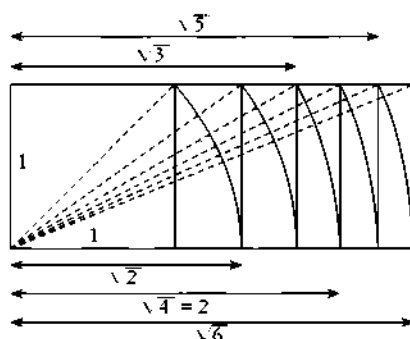
Formati teorici e formati reali

La definizione ufficiale dei formati della carta, ovviamente, non può far riferimento alla radice quadrata di 2 in quanto tale, ma deve utilizzarne un'approssimazione ragionevole. In effetti sarebbe impen-

sabile definire il formato A4, ad esempio, a partire da un rettangolo le cui dimensioni teoriche devono essere, se espresse in centimetri, pari a 21,02241038... × 29,73017787...! Dato che in questo caso l'esattezza matematica non è compatibile con la pratica, i formati ufficiali sono fissati a partire dall'arrotondamento al millimetro più vicino (più un margine di tolleranza che va da 1 a 3 millimetri, a seconda dei formati). La questione degli arrotondamenti, tuttavia, merita una precisazione. Il modo in cui i formati possono essere dedotti gli uni dagli altri, infatti, suggerisce due modi diversi di fissare gli arrotondamenti. Il primo si basa sull'espressione teorica delle dimensioni di ogni formato, di cui si prende ogni volta il valore arrotondato al millimetro. Dalle definizioni precedenti, ad esempio, possiamo calcolare che il formato An ha una larghezza di $(\sqrt{\sqrt{2}})/(\sqrt{2})^{n+1}$ e una lunghezza di $(\sqrt{\sqrt{2}})/(\sqrt{2})^{n}$, espresse in metri. Per $n = 4$, ad esempio, i valori corrispondenti sono 0,2102241038... e 0,2973017787..., che vengono arrotondati al millimetro più vicino.

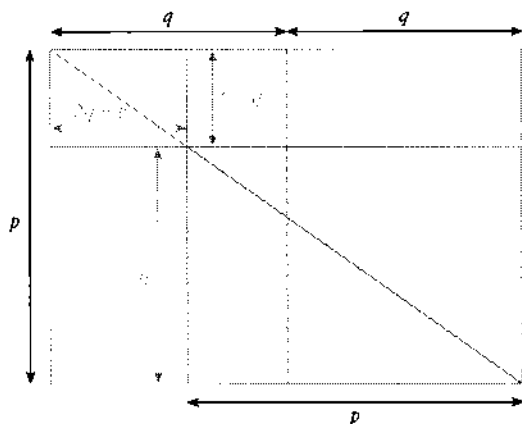
L'altro metodo consiste nel partire dalle dimensioni del formato A0, arrotondate al millimetro, e calcolare quelle del formato A1 dividendo lunghezza e larghezza per $\sqrt{2}$ per poi arrotondare di nuovo, e così via (stessa cosa per le serie B e C). Dato che tra una tappa e la successiva si possono accumulare gli errori di arrotondamento, questo secondo metodo non dà gli stessi esatti risultati del primo. Di fatto è con quest'ultima procedura che si definiscono le dimensioni dei vari formati cartacei. Rispetto alla prima, essa presenta il vantaggio di stabilire una corrispondenza ottimale tra un formato e quelli immediatamente vicini. Nonostante tutto, la differenza tra i due metodi non è grande. In molti casi, come in quello del formato A4, le misure ottenute con entrambi i metodi sono identiche; si hanno delle differenze, trascurabili, solo per alcuni formati, ma lasciamo al lettore il compito di scoprire quali.

A proposito di problemi di approssimazione, segnaliamo infine un aneddoto: la definizione dei formati della norma ISO 216 è precisa al millimetro, mentre quella della legge sui bolli del 13 brumaio dell'anno VII era precisa al *decimo* di millimetro. Una simile rigidità nella norma definita dai rivoluzionari francesi era indubbiamente il segno di una relativa mancanza di riflessione sul miglior compromesso tra precisione teorica e realizzazione pratica, e non di una miglior attitudine al calcolo!

Parabole, ellissi e telescopi. A Newton dobbiamo l'invenzione di un tipo di telescopio molto comune che porta il suo nome e il cui principio consiste nel raccogliere la luce dell'astro che si vuole osservare mediante uno specchio parabolico. Uno specchio del genere gode di una proprietà particolare: i raggi luminosi che lo raggiungono da direzioni che si possono considerare come parallele, in seguito alla riflessione convergono su un unico punto *F*, detto «fuoco». All'aumentare delle dimensioni dello specchio, aumenta la quantità di luce catturata e concentrata, e migliore è la qualità del telescopio (lo stesso principio è alla base del funzionamento delle «parabole» per la ricezione dei canali televisivi satellitari). Un secondo specchio, questa volta piano, viene posto davanti al primo, con la funzione di deviare la luce e inviarla all'oculare dietro al quale si trova l'occhio dell'osservatore.

Per ragioni di ordine pratico è preferibile che l'immagine dell'astro osservato sia inviata all'osservatore in direzione perpendicolare al tubo del telescopio, e quindi lo specchio secondario deve essere posizionato in modo da formare un angolo di 45° con il tubo mede-

simo. Ma che forma deve avere? Per rispondere alla domanda bisogna tenere presente che lo scopo è quello di intercettare la massima quantità di luce possibile. Uno specchio troppo piccolo rifletterebbe solo una piccola parte della luce inviata dallo specchio parabolico, mentre uno troppo grande farebbe da schermo, impedendo che i raggi luminosi provenienti dall'astro raggiungano lo specchio parabolico in quantità sufficiente. Il compromesso ottimale consiste nel dare allo specchio secondario la forma esatta dell'intersezione tra il cono di luce riflesso dal primo specchio e un piano inclinato di 45° rispetto all'asse del telescopio. Si può dimostrare che la forma così ottenuta è quella di un'ellisse, che è identica a quella di un cerchio visto di sbieco (si pensi, ad esempio, a come appare il bordo superiore di un bicchiere rotondo che venga inclinato). Il segmento più piccolo che unisce due punti dell'ellisse passando per il centro di quest'ultima si chiama asse minore, mentre quello più grande è detto asse maggiore. La distanza tra lo specchio parabolico e il suo fuoco, detta distanza focale, è sempre abbastanza grande perché, in pratica, all'altezza dello specchio secondario il cono di luce uscente dallo specchio parabolico sia assimilabile a un cilindro. Un ragionamento geometrico permette quindi di dimostrare che, nell'ambito di tale approssimazione, il rapporto tra la lunghezza dell'asse maggiore e quella dell'asse minore è uguale a $\sqrt{2}$. Perciò la forma ottimale per lo specchio secondario di un telescopio di tipo newtoniano è quella dell'ellisse inscritta in un rettangolo diagonale. Dato che non è facile costruire uno specchio di forma ellittica, spesso gli astronomi dilettanti si accontentano di approssimare l'ellisse con un ottagono, la cui fabbricazione è più semplice.

Geometria del rettangolo diagonale

Come abbiamo visto, dividere un rettangolo diagonale in due rettangoli diagonali è facilissimo. E in che modo dovremmo ritagliare il nostro rettangolo per poter poi rimetterne insieme i frammenti così da ottenere *tre* rettangoli diagonali? Ecco un metodo semplice per riuscirci (lasciamo al lettore il compito di dare una dimostrazione dettagliata del risultato).

Dato il rettangolo diagonale *ABCD*, si definiscano i punti *I* e *J* rispettivamente a metà di [*AD*] e [*BC*]. Si può dimostrare che le rette (*AJ*) e (*CI*) sono perpendicolari alla diagonale (*DB*) e che i punti *E* e *F* suddividono il segmento [*DB*] in tre segmenti di ugual lunghezza. Prendendo il segmento [*AB*] come unità, e applicando il teorema di Pitagora (si veda l'appendice alla seconda parte) ai triangoli *ABD* e *ABF*, si trova rispettivamente che $DB = \sqrt{3}$ e $AF = \sqrt{2}/\sqrt{3}$. Il rapporto *AF*/*FB*, dunque, è uguale a $(\sqrt{2}/\sqrt{3})/(\sqrt{3}/3) = \sqrt{2}$: a questo punto è sufficiente unire i triangoli *ABF* e *DCE* per le ipotenuse ([*AB*] e [*CD*]) per ottenere un rettangolo diagonale, di cui si calcola facilmente l'area per verificare che corrisponde proprio a un terzo di quella del rettangolo *ABCD*. Non resta altro da fare che unire il trapezio *AFEI* al triangolo *FBJ* (facendo coincidere i segmenti [*AI*] e [*BJ*]) e il trapezio *CEFJ* al triangolo *EDI* (facendo coincidere i segmenti [*JC*] e [*ID*]) per ottenere gli altri due rettangoli diagonali desiderati. (Hambidge, il teorico del design di cui abbiamo parlato nel capitolo 9, ha elaborato diverse costruzioni elementari del medesimo genere sui rettangoli diagonali).

La costruzione del rettangolo diagonale apre anche la strada alla triplicazione del quadrato. Come abbiamo visto nel corso del ragionamento precedente, la diagonale di un rettangolo diagonale di larghezza unitaria è lunga $\sqrt{3}$: facendola ruotare fino a renderla perpendicolare alla larghezza del rettangolo si ottiene un nuovo rettangolo il cui lato maggiore misura $\sqrt{3}$. Partendo da quest'ultimo si costruisce facilmente un quadrato di area uguale a 3, triplicando così il quadrato iniziale che aveva dato origine al rettangolo diagonale. Infine, la diagonale del nuovo rettangolo di lati 1 e $\sqrt{3}$ è lunga $\sqrt{4} = 2$: ruotandola a sua volta si quadruplica il quadrato di partenza. Applicando a ripetizione il procedimento si ottiene, per ogni intero n, un rettangolo di lunghezza $\sqrt{n}$, a partire dalla quale, con una semplice costruzione geometrica complementare (che non è stata rappresentata nella figura seguente) si ottiene un quadrato di area n.

Come abbiamo già detto (vedi cap. 9), il rettangolo diagonale è utilizzato dagli origamisti, che ne sfruttano le proprietà geometriche per realizzare vari tipi di piegatura. Secondo David Lister, specialista della disciplina, il rettangolo diagonale non è ancora molto conosciuto dagli appassionati, e le piegature da inventare sono ancora molte. Lister ritiene che in questo campo il rettangolo diagonale sia «il più promettente» di tutti, anche se sull'argomento non è ancora mai stata pubblicata una sintesi che possa dirsi esauriente. Più avanti, e nel corso del capitolo 17, daremo qualche esempio di piegatura (i lettori interessati troveranno altri esempi, inventati da John Cunliffe, sul sito Internet di Gerard Hughes, e altri ancora, a opera di Thoki Yenn, su quello di Erik Demaine).

I rettangoli diagonali e l'irrazionalità di $\sqrt{2}$

La proprietà dei rettangoli diagonali che ne giustifica l'uso nei formati dei fogli di carta porta a nuove dimostrazioni dell'irrazionalità della radice quadrata di 2. Quella che segue è una presentazione apparentemente inedita di una dimostrazione aritmetica.

Supponiamo che $\sqrt{2}$ sia uguale alla frazione p/q, dove p e q sono più piccoli che si può, e consideriamo due rettangoli identici di lunghezza p e larghezza q, attaccati l'uno all'altro per uno dei lati maggiori (verticali sulla figura). Trattandosi di rettangoli diagonali, anche il rettangolo più grande formato dalla loro unione, le cui dimensioni sono $2p$ e q, è diagonale.

Facciamo ruotare di novanta gradi uno dei due rettangoli iniziali, sovrapponiamolo all'angolo inferiore destro del rettangolo più grande, e occupiamoci del rettangolo più piccolo che compare in alto a sinistra: dato che il rapporto lunghezza/larghezza è lo stesso per il rettangolo grande e per quello ruotato, resterà identico anche per il rettangolo più piccolo (è il teorema di Talete). Avendo ipotizzato che tale rapporto sia uguale a $p/q = \sqrt{2}$, ed essendo la lunghezza e la larghezza del rettangolo più piccolo rispettivamente uguali a $2q - p$ e $p - q$, si ha $(2q - p)/(p - q) = \sqrt{2}$: le dimensioni di questo rettangolo, quindi, sono date da numeri interi inferiori a p e q e il cui rapporto vale $\sqrt{2}$, in contraddizione con l'ipotesi che

il rettangolo di dimensioni p e q sia il più piccolo a possedere tale proprietà.

Una riformulazione aritmetica di questa dimostrazione è la seguente: supponiamo che $\sqrt{2}$ sia uguale alla frazione p/q, dove si suppone che p e q siano i più piccoli interi che possano soddisfare tale uguaglianza, e consideriamo la frazione $(2q-p)/(p-q)$. Partendo dalla relazione $q = p/\sqrt{2} = \sqrt{2}p/2$, si ha:

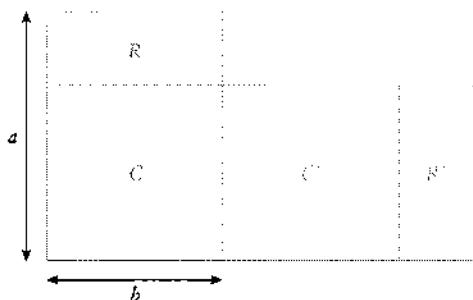
$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{\sqrt{2}p-p}{p-\sqrt{2}p/2} = \frac{\sqrt{2}-1}{1-\sqrt{2}/2} = \frac{(\sqrt{2}-1)(1+\sqrt{2}/2)}{1-1/2} = \sqrt{2}$$

Partiti dalla frazione p/q, per ipotesi uguale a $\sqrt{2}$, abbiamo costruito una nuova frazione, $(2q-p)/(p-q)$, anch'essa uguale a $\sqrt{2}$, con il numeratore inferiore a p e il denominatore inferiore a q (ne lasciamo la verifica al lettore), in contraddizione con l'ipotesi iniziale che p e q siano gli interi più piccoli tali che il loro rapporto sia uguale a $\sqrt{2}$.

Una differenza importante tra quest'ultima dimostrazione e quella «classica» del capitolo 5 sta nel fatto che qui non abbiamo mai utilizzato la nozione di frazione irriducibile: abbiamo parlato di rapporto espresso come frazione in cui il numeratore e il denominatore sono i più piccoli possibile. Certo, non è molto difficile verificare che le due nozioni coincidono; tuttavia, le dimostrazioni derivate dai due approcci sono diverse. Nella dimostrazione precedente, in particolare, non si fa mai riferimento all'idea di divisibilità: il numeratore e il denominatore, infatti, non sono sostituiti dai loro divisori (come nel caso della dimostrazione classica, dove al posto di p e q si prendono $p/2$ e $q/2$), ma, più semplicemente, da numeri più piccoli, $(2q-p)$ e $(p-q)$, che, *a priori*, non sono divisori di p e q.

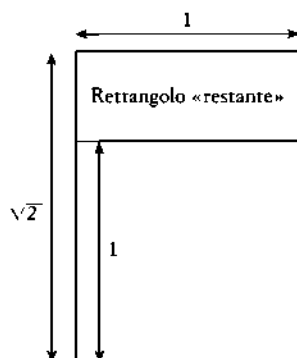
Indipendentemente dal fatto che se ne scelga la forma geometrica o quella aritmetica, la dimostrazione precedente può essere utilizzata per $\sqrt{n}$, qualunque sia n. Lasciamo al lettore il compito di farlo, partendo dalla constatazione che $\sqrt{n}$ è l'unico valore (positivo) uguale a n volte il proprio inverso.

Un'altra dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ a partire dai rettangoli diagonali è stata proposta nel 1969 da Hugo Steinhaus. È un po' più complicata della precedente, e consiste nel prendere due rettangoli diagonali identici di lunghezza a e larghezza b: il primo

viene disposto verticalmente, e il secondo orizzontalmente, attaccato al primo nel modo che si può vedere nella figura seguente.

La parte sporgente del rettangolo di sinistra è un rettangolo che indichiamo con R. indichiamo poi con R' il rettangolo corrispondente all'interno del rettangolo diagonale disposto orizzontalmente. Le due porzioni restanti sono dei quadrati, C e C'.

La relazione $a/b = \sqrt{2}$ si riscrive così: $a^2 = 2b^2$, da cui $a^2 - b^2 = b^2$, o anche $(a + b)(a - b) = b^2$. Se ne ricava l'uguaglianza $(a + b)/b = b/(a - b)$. Ora, l'espressione $(a + b)/b$ corrisponde al rapporto lunghezza/larghezza del rettangolo formato dall'unione di C, C' e R', mentre $b/(a - b)$ è uguale a quello di R; questo rapporto comune, inoltre, vale $1 + \sqrt{2}$.

Da tutto ciò si deduce che, partendo da un rettangolo a lati interi e con un rapporto lunghezza/larghezza pari a $1 + \sqrt{2}$, e sottraendone due quadrati di taglia massima, si ottiene un rettangolo più piccolo il cui rapporto lunghezza/larghezza è sempre $1 + \sqrt{2}$ e i cui lati sono ugualmente interi (se il rettangolo iniziale ha lunghezza x e larghezza y, quello finale ha lunghezza y e larghezza $x - 2y$). Ripetendo la stessa procedura nel rettangolo più piccolo si ottiene un rettangolo ancora più piccolo, e poi un altro ancora, e così via, finendo per imbattersi in una contraddizione, poiché tutti questi rettangoli, sempre più piccoli, dovrebbero essere tutti dotato di lunghezza e larghezza intere. Con questo ragionamento, di tipo «discesa infinita» (e legato allo «sviluppo in frazione continua» di $1 + \sqrt{2}$ – vedi cap. 17) dimostra che $1 + \sqrt{2}$ è un numero irrazionale; con un calcolo immediato se ne deduce poi che anche $\sqrt{2}$ è irrazionale.

I rettangoli in cui il rapporto tra la lunghezza e la larghezza è di $1 + \sqrt{2}$ sono stati battezzati rettangoli «rimanenti» o «restanti»

(*left-over rectangles*) dall'origamista britannico David Mitchell. La ragione di questa denominazione è che un tale rettangolo è il «resto» dell'operazione che consiste nel sottrarre a un rettangolo diagonale il più grande quadrato possibile.

12.

Come non vedere $\sqrt{2}$ dappertutto

Certi passaggi dei capitoli precedenti potrebbero indurre a credere che la radice quadrata di 2, al di là del suo aspetto matematico, sia anche una sorta di «chiave segreta» che consentirebbe di scoprire le intenzioni più o meno nascoste di pittori, architetti e, più generalmente artisti. È sicuramente indiscutibile, comunque, che, oltre agli esempi che abbiamo citato, un rapporto di grandezze pari a $\sqrt{2}$ si trovi in molte altre opere. D'altronde non mancano certo le ricerche volte a smascherarlo (insieme ad altri rapporti notevoli). Tuttavia, gli eccessi frequenti hanno messo in evidenza la necessità di intraprendere ricerche del genere con la debita prudenza. In questo capitolo ci proponiamo di eliminare qualsiasi ambiguità sulla natura dell'attrazione che la radice quadrata di 2 può legittimamente esercitare.

Del buon uso di una costante universale

Pur senza essere la «campionessa» della categoria, la radice quadrata di 2 ha dato vita a un'intera letteratura sui vari luoghi che fanno pensare a una sua presenza voluta. In campo architettonico, Kim Williams ha proposto che la cappella dei Medici, a Firenze, sia stata concepita da Michelangelo a partire da un sistema di proporzioni contenente dei rettangoli diagonali; secondo Eric Fernie, il rapporto $\sqrt{2}$ è presente nella cattedrale di Norwich, in Gran Bretagna; la sua presenza è ipotizzata anche nel Pantheon, a Roma, e nella cattedrale di Ely, in Gran Bretagna. Uno studio realizzato da

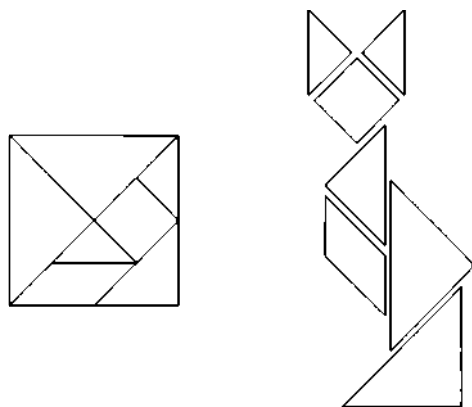
Michel Schneider, questa volta nell'ambito del design, suggerisce che le proporzioni di un mobile concepito e realizzato nel XIX secolo da Gustav e Christian Herter (esposto al Metropolitan Museum of Art di New York) siano state fissate ispirandosi a rettangoli diagonali. Infine, le dimensioni di una celebre tela di Piero della Francesca, *La flagellazione di Cristo*, sono state paragonate a quelle di un rettangolo diagonale.

In tutto ciò, così come altrove, vi sono certamente delle piste interessanti da esplorare; c'è da chiedersi, tuttavia, fin dove sia ragionevole spingersi. Nulla vieta di ritenere eleganti le proporzioni di un rettangolo diagonale, ma è molto più difficile, invece, valutarne l'effettiva presenza in un particolare edificio antico o nella tela di un certo maestro. Le ragioni principali che inducono a mantenere la più grande prudenza su questo tipo di affermazioni sono due. La prima è che, mancando i piani originali a partire dai quali sono state realizzate le opere, qualsiasi valutazione delle loro proporzioni può essere fatta solo basandosi sulle misure dirette. Purtroppo, il tempo, che altera le proporzioni, e le imprecisioni al momento della realizzazione dell'opera rendono delicata la ricostruzione delle intenzioni originali dell'artista. Per molto tempo, in architettura, uno scarto di vari punti percentuali tra il progetto e la realizzazione non ha costituito nulla di eccezionale.

Altra limitazione: proviamo a individuare sulla tela di un pittore una decina di punti particolarmente significativi (l'estremità di una mano tesa, lo sguardo di un personaggio, la cima di una collina ecc.). Il numero di lunghezze definite da questi dieci punti supera i tre milioni, e i rapporti tra le lunghezze medesime hanno valori compresi approssimativamente tra 1 e 15. È facile capire che, in queste condizioni, il fatto che tra di loro compaia qualche valore molto simile alla radice quadrata di 2 o a qualsiasi altro numero non ha nulla di eccezionale o di notevole, tanto più che un dipinto o un edificio non possono essere ridotti alla sola geometria delle figure: esistono molti altri elementi (colori, contrasti, prospettive, illusioni ottiche...) capaci di modificare profondamente l'equilibrio intorno a una certa figura di base.

In mancanza di un'intenzione esplicita da parte dell'artista, inferire dalla misura di un rapporto prossimo a $\sqrt{2}$ all'interno di un'opera la presenza voluta della radice quadrata di 2 si rivela pertinente

solo nella misura in cui l'opera in questione rappresenta in maniera manifesta una delle proprietà geometriche caratteristiche di $\sqrt{2}$. Non c'è dubbio, le dimensioni di certe tele di Piero della Francesca, nel Quattrocento, fanno pensare al rettangolo diagonale, come ad esempio il dittico dei duchi di Urbino (esposto al Museo degli Uffizi, a Firenze), che misura all'incirca 33 cm per 47 cm (cioè un rapporto vicino a 1,42): senza altri elementi, però, diventa impossibile dedurne alcunché. Esaminiamo più attentamente i dipinti: un fiume, una strada, un cambiamento di contrasto definiscono vagamente un quadrato a partire dal quale si può costruire il rettangolo diagonale, ed è praticamente tutto quel che c'è. Verdetto: l'indizio è troppo labile per potersi permettere supposizioni ulteriori.

Certo, si può ribattere che un artista è capace di inventare, o reinventare, inconsapevolmente un fenomeno di ordine matematico, come nel XIX secolo il giapponese Hokusai, il quale, nella sua celebre stampa intitolata *L'onda* ha anticipato senza saperlo la nozione di oggetto frattale. Hervé Lehning, un insegnante di matematica, ha fatto notare di recente che il rapporto tra l'altezza e il raggio alla base dei teepee conici degli Indiani dell'America del Nord sembra essere sistematicamente simile a $\sqrt{2}$. Senza pretendere di aver studiato la cosa in maniera approfondita, Lehning

I pezzi del gioco del tangram, e un esempio di composizione. Il gioco, le cui origini restano oscure (sappiamo solo che esisteva in Cina all'inizio del XIX secolo), è formato da un insieme di pezzi quadrati e triangolari ritagliati lungo linee diagonali: da un punto di vista geometrico, dunque, la radice quadrata di 2 vi è certamente presente, ma in maniera del tutto accidentale.

avanza una possibile spiegazione: servendosi di tecniche classiche del calcolo differenziale (che però esulano dall'ambito del nostro discorso), si dimostra che è proprio quello il rapporto che garantisce il massimo volume interno con la minima superficie laterale (escludendo quindi il suolo). In altri termini, data una certa disponibilità di tela e di pelli, il teepee con il volume più grande che si possa costruire è quello in cui il rapporto tra altezza e raggio vale $\sqrt{2}$. Anche in questo caso, dunque, potremmo essere in presenza di una scoperta intuitiva e inconsapevole. In assenza di elementi complementari, però, si tratta solamente di una pura possibilità.

Per concludere, anche se le proprietà geometriche di un'opera fanno sì che al suo interno sia presente la radice quadrata di 2, non è affatto detto che l'autore provasse per $\sqrt{2}$ un interesse particolare, altrimenti dovremmo estasiarci per l'apparizione di $\sqrt{2}$ ogni volta che un artista o un artigiano ci fanno vedere un quadrato!

I comignoli di Neuchâtel Promulgato nel 1959, il regolamento urbanistico della città svizzera di Neuchâtel riporta, al primo capoverso dell'articolo 66, questa strana disposizione: «L'altezza massima dei comignoli è fissata a 1/10 della larghezza della strada moltiplicata per la radice quadrata di 2». Questa norma bizzarra è sopravvissuta alla profonda revisione del regolamento effettuata nel 1998. Interrogati su questo particolare quantomeno curioso del loro regolamento, i servizi municipali competenti non sono riusciti a spiegarne l'origine. La presenza della radice di 2 è legata a una motivazione estetica, come quella che Sérusier vedeva nella «porta dell'armonia» (vedi cap. 9)? Il fatto che si cominci dividendo la larghezza della strada per 10, impossibile da spiegare in termini di estetica geometrica, rende improponibile una spiegazione del genere. Un po' per volta si finisce per pensare alla proposta di legge di Edward Goodwin (vedi cap. 5). Qui, a differenza dell'Indiana, siamo di fronte a una scelta che non implica un errore matematico in senso stretto, ma è pur vero che intorno ai comignoli svizzeri aleggia un profumo di *Pi Bill*...

Un numero aureo?

Forse qualche lettore si stupirà di trovarsi di fronte a degli avvertimenti che non si limitano alla radice quadrata di 2, ma si estendono, di fatto, a ogni sorta di analisi geometrica di dipinti e opere architettoniche. Tali avvertimenti sono tanto più necessari alla luce del numero delle persone che credono di vedere nelle opere d'arte proporzioni nascoste o misteriose.

L'esempio emblematico di questo atteggiamento ingiustificato è il «numero aureo». Costante fondamentale della matematica, la cui importanza è pari a quella della radice quadrata di 2 (tra i due numeri, del resto, vi è un legame stretto – vedi capp. 23 e 24), il numero aureo corrisponde all'espressione $(1 + \sqrt{5})/2$, che vale approssimativamente 1,618. Il numero aureo, che viene indicato sovente con la lettera greca φ (*phi*; c'è chi utilizza la maiuscola, Φ), costituisce un esempio raro e affascinante di *mitologia matematica* di cui talvolta possono essere vittime inconsapevoli persino degli scienziati competenti. Agli innumerevoli dilettanti troppo entusiasti che sparano falsità e inesattezze sul numero aureo bisogna aggiungere i molti matematici quantomeno ingenui che le diffondono in assoluta buona fede.

Come ogni leggenda, anche quella del numero aureo contiene un fondo di verità, costituito dalle tantissime proprietà aritmetiche e geometriche che vi sono correlate e che riempiono libri interi. Tra questi, il più antico di tutti è il *De divina proportione* di Luca Pacioli. Pubblicato nel 1509, costituisce senza dubbio la prima opera dedicata interamente ed esclusivamente alle proprietà di un solo numero. Ma è soprattutto nel XIX e nel XX secolo che si consacra il mito di una proporzione universale che sembra essere presente sia nei dipinti dei maestri rinascimentali che sul Partenone. Dopo Adolf Zeising, che fu senza dubbio il primo, nel XIX secolo, a dar vita al mito, il principale promotore della leggenda è stato un diplomatico rumeno, Matila Ghyka (è lui ad aver coniato l'espressione «numero aureo»), che a partire dagli anni trenta ha pubblicato varie opere in cui spiega come la sua proporzione-feticcio sia onnipresente nell'arte, soprattutto in quella occidentale. La fertilità della sua immaginazione era pari solo alla fragilità delle sue prove:

prima di Zeising, l'unica proporzione irrazionale esplicitamente implicata nell'espressione artistica, e più precisamente nell'architettura, non aveva a che fare con il numero aureo, ma con la radice di 2. Da questo punto di vista, è quantomeno sorprendente che il mito si sia cristallizzato sul primo e non sulla seconda. Quest'ultima, forse, in quanto banale diagonale del quadrato, era «troppo semplice» per fungere da crogiolo di un mito che si nutriva di misteri e di segreti... (aggiungiamo però che Ghyka, analogamente ad altri cacciatori di misteri geometrici, non aveva un interesse esclusivo, e si è occupato più volte della radice quadrata di 2).

Precisiamo una cosa: non stiamo cercando di negare che il numero aureo possa comparire in un certo edificio o in un dipinto, ma solo di constatare quanto siano scarsi gli elementi cruciali a favore di questa tesi. Si può anche pensare, come affermava Pacioli, che il segreto sulle meraviglie di questa «proporzione divina» sia stato custodito gelosamente: quel che è certo, però, è che in tutti gli esempi proposti insistentemente come probanti, la presenza del numero aureo è tutt'al più possibile, e mai certa.

Tra i casi riconosciuti di impiego esplicito del numero aureo troviamo un'esposizione di quadri del 1912 a Parigi, intitolata *La sezione aurea*. Vi si trovarono riunite alcune grandi firme dell'epoca, tra cui Marcel Duchamp e Fernand Léger. Anche se i quadri che vi furono esposti non lo mostrano affatto, sembra che l'intenzione iniziale fosse quella di valorizzare il rapporto definito da φ. Eppure, interrogato successivamente su cosa fosse per lui la sezione aurea, Jacques Villon, uno dei pittori che aveva ideato l'esposizione, rispose che il termine corrispondeva alla «definizione del numero aureo, il rapporto tra la diagonale e il [lato del] quadrato»: in effetti, la sua definizione, sbagliata, corrisponde alla radice quadrata di 2! Se è vero che le assurdità matematiche grossolane non sono certo rare tra i non addetti ai lavori, va anche detto che gli stessi matematici farebbero meglio a non dare lezioni, ma a prenderne. Molti di loro, infatti, dimostrano una sconcertante mancanza di discernimento a proposito di pretesi «fatti storici» relativi al numero aureo, molti dei quali facilmente confutabili. Quasi tutti gli specialisti di storia dell'arte, dal canto loro, sono molto più prudenti e riservati nell'interpretare le opere d'arte su basi puramente geometriche.

Una successione eclissata da un limite

Uno degli strumenti principali per invocare la presenza del numero aureo a destra e a manca è una costruzione matematica nota come «successione di Fibonacci», una sequenza di numeri in cui ogni elemento (ogni «termine») è la somma dei due che lo precedono. Dato che i due primi termini sono presi uguali a 1, la successione di Fibonacci comincia così: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Fibonacci è il nome con cui era conosciuto un matematico italiano del XII secolo, Leonardo da Pisa, cui si è soliti attribuire la paternità della successione poiché in una delle sue opere, il *Liber abaci*, egli propone un problema a proposito di una coppia di conigli che si riproduce; la soluzione del problema si ottiene calcolando il dodicesimo termine della successione precedente. Non sembra che Fibonacci si sia spinto oltre, ma oggi sappiamo che la successione che porta il suo nome possiede molte proprietà, una delle quali è che i rapporti tra termini successivi (1/1, 2/1, 3/2, 5/3, 8/5 ecc.) danno dei valori che si avvicinano sempre di più al numero aureo. Si dice che il numero aureo è il «limite» dei rapporti tra termini consecutivi della successione di Fibonacci; è proprio questa proprietà del numero aureo a spiegare in gran parte il suo status di costante matematica fondamentale.

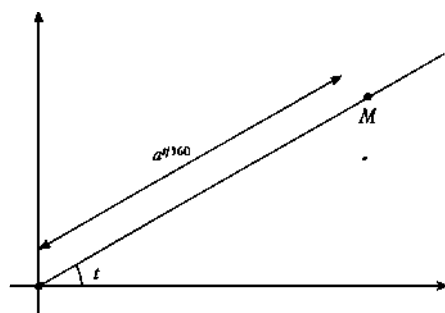
È stato fatto notare che la disposizione delle foglie attorno al gambo di certe piante ricorda la successione di Fibonacci. Le foglie «avvolgono» il gambo formando una sorta di elica, e il numero delle foglie dopo un giro, due giri, e così via, segue l'andamento della successione di Fibonacci. Questa constatazione empirica può essere giustificata a livello teorico da argomentazioni matematiche complesse per determinare che la presenza della successione di Fibonacci è – o, più precisamente, potrebbe essere – l'incarnazione di una proprietà specifica del numero aureo (vedi capp. 23 e 24). In ogni caso, non è ancora stato dimostrato in maniera definitiva che le caratteristiche fillotassiche legate al numero aureo presentino un vantaggio evoluzionistico tale da spiegarne la comparsa nel quadro della teoria dell'evoluzione. Si tratta comunque di un argomento su cui si lavora da molto tempo: a tale proposito citiamo, ad

esempio, i lavori svolti da Yves Couder e Stéphane Douady negli anni novanta.

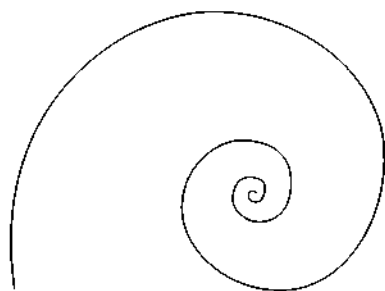
A eccezione di alcuni casi ben precisi, in cui si può invocare una proprietà matematica specifica a sostegno dell'ipotesi che il numero aureo si stia nascondendo da qualche parte, ci si deve ricordare sempre che *la successione di Fibonacci non è il numero aureo*, e che molte delle sue notevoli proprietà matematiche non hanno nulla a che vedere, da vicino o da lontano, con il numero aureo. In particolare, nel *Modulor*, un'opera dell'architetto Le Corbusier – influenzata da Ghyka – in cui si è visto un «punto di riferimento» per il legame tra il numero aureo e l'architettura, la «proporzione aurea» cede spesso il posto alla successione di Fibonacci e ad alcune sue caratteristiche specifiche (del resto Le Corbusier non va oltre il tredicesimo termine, che vale 233).

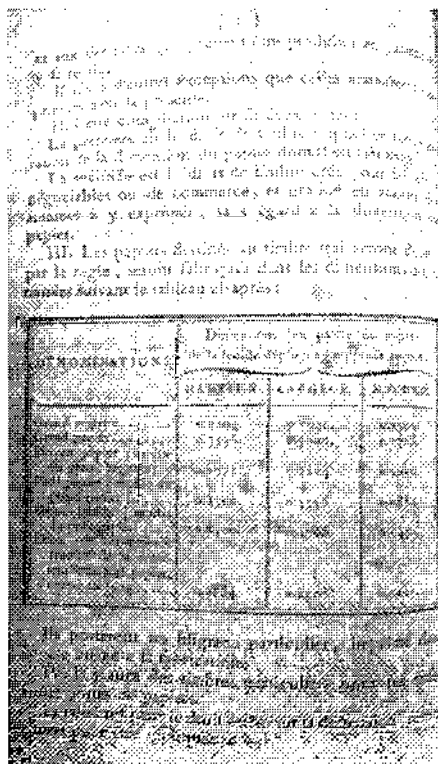
Mentre nel caso della fillotassi è da una proprietà del numero aureo che potrebbe avere origine la successione di Fibonacci, in altre situazioni capita piuttosto il contrario, cioè è la comparsa della successione di Fibonacci a indurre in modo «accidentale» quella del numero aureo. È il caso di un'ipotesi formulata dal genetista Amar Klar, ipotesi interessante a livello intellettuale ma priva, per il momento, di prove sperimentali a suo favore. L'idea di Klar riguarda la divisione cellulare, e suggerisce una possibile spiegazione della comparsa in natura, sotto diverse forme, del numero aureo. Secondo lo schema di funzionamento classico della divisione cellulare, una cellula madre si divide in due cellule figlie identiche, che si dividono a loro volta, e così via. A ogni generazione, dunque, il numero di cellule raddoppia. Nel modello di Klar, ogni cellula si divide in due cellule figlie che però non sono più biologicamente identiche: una, che chiameremo di tipo I, porta con sé la totalità del materiale necessario alle divisioni future (e si divide nuovamente senza attendere); l'altra, invece, che diremo di tipo II, deve fabbricarsi tutto quanto da sola. Si presuppone che il tempo necessario a una cellula di tipo I per dividersi sia uguale a quello impiegato da una cellula di tipo II per fabbricarsi tutto il materiale necessario per la propria divisione (e quindi per trasformarsi a sua volta in una cellula di tipo I).

Si dimostra che in questo modello la crescita del numero di cellule corrisponde esattamente a quella del numero di coppie di coni-

gli di Fibonacci (ogni coppia, ogni mese, ne genera una nuova, che ci mette un mese per poter procreare a sua volta). Un'ipotetica cellula che adotti questo modo di dividersi vede crescere la propria popolazione secondo la successione di Fibonacci. Dato che il rapporto tra termini consecutivi della successione si avvicina sempre di più al numero aureo, il fattore moltiplicativo medio da applicare al numero di individui di una generazione per ottenere quello della generazione seguente non è più 2, come nel caso della mitosi classica, ma $(1 + \sqrt{5})/2$.

Come si può vedere, la comparsa del numero aureo in questo contesto non è che una conseguenza secondaria di una proprietà della successione di Fibonacci, contrariamente a quanto capita nell'esempio delle foglie sul gambo che abbiamo visto poco fa. Va detto, poi che nel modello di Klar il numero aureo appare solo in virtù di una scelta *ad hoc* dei parametri. Immaginiamo, ad esempio, che per fabbricare tutto il materiale necessario alla loro divisione le cellule di tipo II impieghino un tempo doppio di quello necessario alle coppie di tipo I per dividersi. In tal caso, la popolazione delle cellule non evolve più secondo la successione di Fibonacci, ma secondo quest'altra: 1, 2, 5, 12, 29, 70, ..., in cui ogni termine si ottiene raddoppiando quello che lo precede e sommando quello ancora precedente ($5 = 2 \times 2 + 1$, $12 = 2 \times 5 + 2$, $29 = 2 \times 12 + 5$, $70 = 2 \times 29 + 12$ ecc.). Nel corso del capitolo 18 vedremo che i rapporti successivi di questa sequenza (2/1, 5/2, 12/5, 29/12, 70/29 ecc.) si avvicinano sempre di più a... $1 + \sqrt{2}$!) Morale: quando si vuole far apparire a ogni costo un numero da qualche parte, ci si riesce sempre.

Dal nautilo alla spirale logaritmica

Il nautilo è un mollusco cefalopode la cui conchiglia spiraliforme è un bell'esempio di legame tra matematica e fenomeni naturali. La curva seguita dalla conchiglia del nautilo è una «spirale logaritmica», la cui proprietà matematica è quella di mantenere la stessa forma man mano che cresce. Il suo vantaggio è di permettere all'animale di crescere mantenendo costanti le proporzioni corporee.

Per la costruzione matematica di una spirale logaritmica si prende un numero a positivo e, scelto un punto come origine, gli si gira intorno facendo in modo che la distanza dall'origine aumenti di un fattore a a ogni giro (la differenza tra la spirale logaritmica e la conchiglia del nautilo è che la prima, a differenza dalla seconda, fa un numero infinito di giri quando la si percorre al contrario – cioè avvicinandosi all'origine). Più precisamente, in un dato sistema di coordinate, i punti M di una spirale logaritmica si ottengono così: dato un numero t qualunque, si traccia la semiretta che parte dall'origine O e che forma con l'asse delle ascisse un angolo t (espresso in gradi). Dopo di che, si considera il punto M della semiretta la cui distanza da O è pari a $a^{t/360}$.

La descrizione completa della forma della conchiglia del nautilo passa per la determinazione del fattore a corrispondente. In linea di principio basta una semplice misura. Curiosamente, però, è solo di recente che alcuni matematici, in particolar modo gli americani John Sharp nel 2002 e Clement Falbo nel 2005, hanno deciso

di affrontare seriamente il problema, rendendo poi noti i risultati alla comunità matematica. La loro conclusione è che il valore di *a* per la conchiglia dei nautili è compreso tra 1,3 e 1,4. Il verdetto in sé non avrebbe nulla di speciale, se non facesse a pugni con la credenza, radicata anche tra molti matematici dilettanti e professionisti, per cui il valore di *a* sarebbe simile al numero aureo. «È assolutamente incredibile», commenta Sharp a conclusione della sua analisi, «che un errore simile sia così diffuso, e in particolar modo tra i matematici, dai quali ci si aspetterebbe che fossero più informati».

Per una serie di ragioni sulle quali non possiamo soffermarci, la spirale logaritmica più «semplice» dal punto di vista matematico è quella caratterizzata da $a = e^{2\pi}$, dove e è la «base dei logaritmi neperiani», cioè circa 2,718, e π è il rapporto tra la circonferenza e il diametro di un cerchio, cioè circa 3,14. Il numero e è una costante matematica fondamentale, di cui non avremo occasione di parlare in dettaglio (vedi cap. 23) ma la cui importanza è immensa: la si ritrova soprattutto nell'analisi e nel calcolo combinatorio (invece ritorneremo sul numero π – vedi capp. 15 e 24). Lo studio di questa particolare spirale logaritmica, detta «naturale», consente di calcolare la lunghezza del suo «ramo centripeto», la porzione che parte dall'origine e finisce nel punto di coordinate (1,0). Anche se, come abbiamo già detto, quando si va indietro nel tempo e ci si avvicina all'origine la spirale fa un numero di giri infinito, la lunghezza del ramo centripeto resta assolutamente finita, e vale $\sqrt{2}$; la spirale logaritmica naturale, quindi, riunisce in sé e, π e $\sqrt{2}$, tre numeri tra i più importanti di tutta la matematica.

Non è tanto nella conchiglia del nautilo che vanno cercati gli splendori della matematica, dunque, quanto nella spirale logaritmica. Analogamente, non sono le parole di un Alberti o di un Vitruvio che giustificano l'importanza di un numero come la radice quadrata di 2, ma il contrario: è per la sua natura di costante fondamentale che $\sqrt{2}$ ha suscitato l'interesse degli architetti. Fortunatamente, gli eccessi di ogni genere compiuti in nome del numero aureo (e non solo), che hanno ancora un avvenire radioso davanti a sé, non tolgono niente all'immensa ricchezza matematica che lo contraddistingue (vedi capp. 23 e 24).

Geometria, aritmetica, analisi ... è qui, e solo qui, che risiedono la bellezza e la magia di φ, $\sqrt{2}$, π o di e, che sono tutti quanti numeri d'oro. Di un oro matematico.

Appendice alla parte terza

La «legge sui bolli» del 13 brumaio dell'anno VII

BULLETIN DES LOIS DE LA RÉPUBLIQUE

N.° 237.

Parte quarta

I decimali

«Ci sono non pochi oggetti riguardo
ai quali non si può a ragione dimostrare
che si trovi in essi un limite [...] e che
tuttavia nessuno classificherebbe come
infiniti. [...] Chiameremo infinitamente
grande un potere di conoscenza non
appena esso, pur senza essere onnisciente,
sia capace di abbracciare un insieme
infinito di verità, come, per esempio,
quelle che enunciano, l'una dopo l'altra,
le infinite cifre della rappresentazione
decimale della singola quantità $\sqrt{2}$».

Bernard Bolzano, *I paradossi dell'infinito*.

La terza parte di questo libro ha dimostrato l'importanza pratica della radice quadrata di 2, ma non ha stabilito l'utilità potenziale del calcolarla con una precisione che vada al di là di qualche cifra decimale. Eppure una maggior precisione presenta un'utilità reale e concreta, di cui abbiamo esplorato qualche aspetto nel capitolo 13.

Una volta stabilito che un calcolo del genere presenta effettivamente un interesse, dobbiamo scoprire come realizzarlo. Per quanto siano diversi i metodi a nostra disposizione, e che presenteremo nel capitolo 14, ce n'è uno che si distingue per l'efficacia: è il «metodo di Erone-Newton», che i nostri modernissimi computer utilizzano ancora oggi praticamente nella stessa forma originale.

Una volta definite le tecniche di calcolo, entrano in gioco i cacciatori di decimali. A parte il numero π, la radice quadrata di 2 è con ogni probabilità il numero che possiede il «carniere» più ricco. Sembra però che non sia mai stato determinato in maniera esauriente: nel capitolo 15 abbiamo cercato di colmare, almeno parzialmente, questa lacuna.

Al di là degli aspetti pratici, il calcolo delle cifre decimali della radice quadrata di 2 ha anche una motivazione teorica, che presenteremo nel capitolo 16: lo studio della loro distribuzione statistica. Da questo punto di vista, il «potere di conoscenza» dei decimali di $\sqrt{2}$ menzionato da Bolzano nel 1851 è per i matematici fonte di interrogativi insondabili fin dall'inizio del XX secolo, a tal punto che la fine delle ricerche sull'argomento sembra ancora oggi ben lontana.

13.

Qualche ragione per essere precisi

Sebbene quanto si è detto finora dimostri l'utilità del concetto di radice quadrata di 2, nulla indica, invece, con quale precisione si debba determinare il valore $\sqrt{2}$ perché sia possibile servirsene in pratica. La questione rientra nel quadro più generale della «estrazione di radice quadrata», cioè del calcolo dei decimali della radice quadrata di un numero dato. Come vedremo, non sempre qualche cifra decimale è sufficiente a soddisfare le esigenze.

L'utile delle radici quadrate

È possibile che uno dei primi problemi che hanno spinto i Babilonesi a elaborare dei metodi per estrarre le radici quadrate sia stato di carattere commerciale. Sapere a che prezzo all'ingrosso comprare una mercanzia per rivenderla al dettaglio con un certo utile, infatti, poteva richiedere un trattamento matematico equivalente a quello che oggi chiamiamo «risoluzione di un'equazione di secondo grado». Si tratta di determinare un valore di x tale che $ax^2 + bx + c = 0$, dove a, b e c sono numeri determinati dai dati concreti del problema. Questo tipo di equazione fa la sua comparsa per ragioni legate in modo particolare alla «definizione del prezzo» babilonese (che faceva corrispondere una quantità di merce a una somma di riferimento, l'equivalente di un «numero di chili all'euro», invece di avere «un numero di euro al chilo» come accade oggi). E se si eccettuano alcuni casi particolari, la risoluzione di un'equazione di secondo grado richiede l'estrazione di una radice quadrata (più pre-

cisamente: la radice quadrata del numero $b^2 - 4ac$, il «discriminante» dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$).

I problemi di secondo grado, dunque, esistevano già ai tempi di Babilonia, ed esistono ancora oggi, nei contesti più disparati. Una pietra che rotola su un piano inclinato ha percorso un metro in un secondo: che distanza ha percorso nel primo mezzo secondo? Una massa appesa a una molla oscilla liberamente su e giù al ritmo di un'oscillazione al secondo: come cambia la frequenza delle oscillazioni raddoppiando la massa? In entrambi i casi, la risposta che si ottiene dall'applicazione delle leggi fisiche (di cui non daremo i dettagli) contiene una radice quadrata (più precisamente, $1/\sqrt{2}$ nel primo caso e $\sqrt{2}$ nel secondo).

Negli esempi che abbiamo menzionato, così come in quelli dei capitoli precedenti, è evidente, comunque, che quattro o cinque cifre decimali sono sufficienti. Per determinare il formato dei fogli di carta secondo la norma attuale delle serie A, B e C, dare a un edificio le proporzioni di un rettangolo diagonale (si veda la parte precedente) o costruire uno strumento musicale accordato secondo la scala ben temperata di Werckmeister, la valutazione della radice di 2 indicata dalla tavoletta babilonese YBC 7289 (vedi cap. 1) è assolutamente soddisfacente. Stando così le cose, perché voler conoscere qualche decimale in più?

Una risposta di natura teorica, sulla quale ritorneremo in seguito (vedi cap. 16), sta nella ricerca di uno schema generale che governi la distribuzione dei decimali nei numeri come $\sqrt{2}$. Da un punto di vista pratico, una delle motivazioni principali per l'estrazione delle radici quadrate è, storicamente, la costituzione di «tavole dei logaritmi», la cui invenzione, avvenuta nel XVII secolo, ha rappresentato una rivoluzione nel mondo del calcolo.

La rivoluzione dei logaritmi

Le «quattro operazioni», vale a dire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, non hanno tutte lo stesso livello di difficoltà pratica: serbiamo tutti il ricordo di quelle interminabili moltiplicazioni e divisioni a quattro cifre, e delle tabelline da imparare a memoria per poter fare tutti quei calcoli. Per secoli, chiun-

que avesse a che fare con la matematica, dagli astronomi agli architetti, passando per i commercianti e gli ingegneri, aveva dovuto vedersela con calcoli faticosi e complicati. Le cose cambiarono quando, nel 1614, lo scozzese John Napier inventò i *logaritmi*, uno strumento che, unito ad alcune idee complementari fornite da Henry Briggs tre anni dopo, diede il via a una rivoluzione paragonabile a quella scatenata, nella seconda metà del XX secolo, dalla comparsa delle prime macchine calcolatrici.

Per definizione, il logaritmo di un intero n, che si indica con $\log(n)$, è la potenza alla quale bisogna elevare il numero 10 per ottenere n. Si ha così $\log(10) = 1$ (poiché $10 = 10^1$), $\log(100) = 2$ (poiché $100 = 10^2$), $\log(1000) = 3$ ($1000 = 10^3$), $\log(0{,}01) = -2$ ($0{,}01 = 10^{-2}$) e così via. L'utilità dei logaritmi nei calcoli si spiega con la formula seguente, valida per qualsiasi coppia di numeri (positivi) x e y:

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y)$$

Questa formula fornisce un metodo particolarmente rapido ed efficace per sostituire una moltiplicazione con un'addizione. Il risultato della moltiplicazione di x per y si ottiene così: sulla tavola logaritmica, troviamo i valori $\log(x)$ e $\log(y)$; sommiamoli, e per finire cerchiamo, sempre sulla tavola logaritmica, il numero il cui logaritmo è uguale a tale somma: la formula precedente ci dice che si tratta del prodotto xy.

Un metodo di calcolo del genere, in cui un'addizione prende il posto di una moltiplicazione, rappresenta un risparmio di tempo notevole. L'innovazione di Napier ha avuto ripercussioni sull'astronomia, sul commercio e sulla navigazione. Le tavole logaritmiche, che studenti e ingegneri utilizzavano ancora negli anni sessanta, sono state rimpiazzate solo dalle calcolatrici moderne. C'era un problema, però: queste famose tavole, bisognava costruirle. E non si trattava di una cosa da poco.

Perché è stato necessario estrarre 47 volte la radice quadrata di 2

Ci sono numeri di cui è facile calcolare il logaritmo: ad esempio, visto che $10^5 = 100\,000$, la definizione ci dice direttamente che $\log(100\,000) = 5$. Una simile semplicità, sfortunatamente, è piut-

tosto rara: per la maggior parte dei numeri (compresi molti numeri di uso comune) il calcolo dei logaritmi è un affare complicato; è qui che le radici quadrate si sono rivelate delle aiutanti preziose. Ma perché? Abbiamo già detto (vedi cap. 3) che, anziché rappresentare la radice quadrata del numero x nella forma $\sqrt{x}$, una notazione più consistente da un punto di vista matematico è $x^{1/2}$. In particolar modo, poi, si ha $\sqrt{10} = 10^{1/2}$, e dunque $\log(\sqrt{10}) = \log(10^{1/2}) = 1/2$, dalla definizione di logaritmo. Analogamente, si ha $\sqrt[3]{10} = 10^{1/3}$, e quindi $\log(\sqrt[3]{10}) = 1/3$. Più generalmente, come potranno verificare nei dettagli i lettori, si ha che per qualsiasi coppia di interi positivi k e n il logaritmo del numero $\sqrt[k]{(10^n)}$ è uguale a n/k.

Quanto detto finora consente di ottenere i logaritmi di una vasta classe di numeri, che però, sfortunatamente, non comprende un numero banale come 3. Per conoscere il valore del logaritmo di 3, l'idea è quella di cercare un numero del tipo $\sqrt[k]{(10^n)}$ abbastanza vicino a 3 perché il suo logaritmo sia così una buona approssimazione di quello di 3. Consideriamo, ad esempio, il numero $\sqrt[21]{(10^{10})}$, che, come si può calcolare, vale all'incirca 2,9936: il logaritmo di 3, dunque, è prossimo a quello di $\sqrt[21]{(10^{10})}$, che per la formula precedente vale 10/21 (cioè all'incirca 0,476). Dunque è attraverso l'approssimazione di 3, quanto ci sia di più «semplice», con il numero $\sqrt[21]{(10^{10})}$, decisamente più «complicato», che si ottiene una stima del suo logaritmo: si ha $\log(3) \approx \log(\sqrt[21]{(10^{10})}) = 10/21 \approx 0{,}476$.

Il prezzo da pagare per conoscere log(3) è alto: se è vero che è facile sapere che il logaritmo di $\sqrt[21]{(10^{10})}$ vale 10/21, determinare la qualità dell'approssimazione del numero 3 con il numero $\sqrt[21]{(10^{10})}$ è tutt'altra cosa, e ancora più difficile è la determinazione di approssimazioni più precise. Il valore $\sqrt[21]{(10^{10})}$ approssima 3 solo a meno di qualche millesimo, e dal momento che l'evoluzione delle tecniche e delle tecnologie si è rivelata sempre più affamata di calcoli con numeri a molte cifre (sia numeri grandi che numeri di cui, semplicemente, si conoscano molte cifre decimali), ben presto si è reso necessario estrarre radici quadrate, cubiche, eccetera, con un numero di decimali sempre più grande. Estendendo e migliorando le idee precedenti per realizzare la sua tavola dei logaritmi, dal 1624 in avanti Briggs giunse così a estrarre la radice di 2 quarantasette volte, cioè a calcolare $\sqrt{2}$, poi $\sqrt{(\sqrt{2})}$, $\sqrt{(\sqrt{(\sqrt{2})})}$, e così via per quarantasette volte, per una precisione complessiva di 32 cifre dopo la virgola!

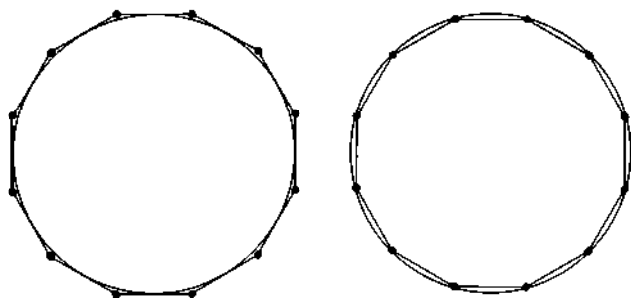
La buona notizia è che, una volta terminata tutta questa estrazione di radici, non è più necessario ritornarci. Con una tavola logaritmica, infatti, per calcolare la radice quadrata di un numero a basta applicare la relazione $\log(\sqrt{a}) = \log(a)/2$ (deducibile dalla relazione $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$ applicata a $x = y = \sqrt{a}$). In pratica, si legge sulla tavola il valore del logaritmo di a, lo si divide per 2 e si cerca sulla tavola il numero il cui logaritmo corrisponde al risultato: quel numero è $\sqrt{a}$. La comparsa dei logaritmi, dunque, ha segnato la fine delle molte proteste di tutti quelli che dovevano estrarre le radici quadrate con i vecchi metodi (vedi cap. seguente), qualsiasi fosse lo scopo: applicare il teorema di Pitagora (si veda l'appendice alla seconda parte), risolvere equazioni di secondo grado o altro ancora.

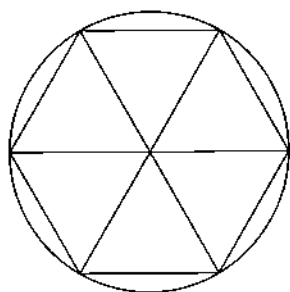
Anche in questo caso, però, qualcuno si chiederà che motivo ci fosse di stabilire delle tavole logaritmiche così precise. A prima vista, per quanto possano aver progredito le tecniche di precisione nel XX secolo, l'utilità non è evidente: grazie all'impiego della tecnologia GPS, l'unione della metà francese del tunnel sotto la Manica con quella inglese è stata effettuata con una precisione di 1 cm dopo aver trivellato per 25 km. Si tratta di un caso estremo: se avesse implicato, per ragioni geometriche, l'utilizzo di un valore approssimato di un numero come la radice quadrata di 2, comunque non avrebbe richiesto la conoscenza di più di sette o otto cifre decimali. E se dei nostri lontani discendenti, una volta conquistato tutto il sistema solare, decidessero di costruire un'immensa piattaforma quadrata di dimensioni paragonabili a quelle dell'orbita del remotissimo Plutone, per conoscerne la diagonale con la precisione di un millimetro potrebbero accontentarsi di una ventina di decimali.

Per capire l'utilità del calcolo di una gran quantità di decimali di un numero come $\sqrt{2}$ analizzeremo un caso esemplare, sul quale, per altre ragioni, ritorneremo più in dettaglio nel capitolo 15: il calcolo del numero π.

Delle radici quadrate per π

Il metodo più antico per la determinazione di π, che ha dettato legge per più di duemila anni, è dovuto ad Archimede. L'idea, espo-

sta dal Siracusano in un'opera intitolata *La misura del cerchio*, consiste nell'approssimare la circonferenza del cerchio con una linea spezzata che forma un poligono regolare.

Nel disegno di destra, il perimetro del poligono inscritto nel cerchio è più piccolo della circonferenza, e ci dà quindi una minorazione di π. Nel disegno di sinistra, il poligono è circoscritto, e il suo perimetro ci dà una maggiorazione di π.

Le tecniche geometriche semplici che consentono di calcolare in maniera esplicita il perimetro di determinati poligoni regolari inscritti e circoscritti a un cerchio forniscono quindi una prima stima di π. Storicamente, Archimede è partito dagli esagoni: si dimostra che, dato un cerchio di diametro unitario, il perimetro dell'esagono inscritto vale 3, e quello dell'esagono circoscritto vale $2\sqrt{3}$ (cioè all'incirca 3,46).

Archimede ha poi migliorato questa prima delimitazione dimostrando come sia possibile, partendo da questi due perimetri, ottenere un'espressione esplicita del perimetro dei poligoni regolari inscritti e circoscritti con 12 lati (dodecagoni) anziché 6, poi con

24 anziché 12, e così via (fermandosi a 96, indubbiamente convinto di esser riuscito a illustrare l'efficacia del suo metodo). Più precisamente, il suo ragionamento conduce alle formule seguenti: supponiamo che p e q siano i perimetri dei poligoni, rispettivamente, inscritto e circoscritto a una certa iterazione del procedimento. Si calcola anzitutto il perimetro del poligono circoscritto dell'iterazione successiva, q', secondo la formula

$$q' = \frac{2}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}}$$

In altri termini, q' è la media armonica di p e q (vedi cap. 10).

Una volta calcolato q', il perimetro p' del poligono inscritto dell'iterazione successiva vale:

$$p' = \sqrt{pq'}$$

In altri termini, p' è la media geometrica di p e q'.

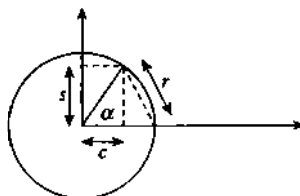
Applicando queste formule per $p = 3$ e $q = 2\sqrt{3}$, i valori del perimetro degli esagoni, si ottiene il perimetro q' del dodecagono circoscritto, e poi quello, p', del dodecagono inscritto. Prendendo i risultati come nuovi valori per p e q e applicando nuovamente le formule, si ottengono i perimetri per 24 lati, e così via. Ogni volta, il valore p' dà una stima di π per difetto (dato che il poligono inscritto ha un perimetro inferiore alla circonferenza del cerchio) e il valore q' una stima per eccesso. All'aumentare del numero dei lati, cioè all'aumentare delle iterazioni della formula di Archimede, diminuiscono le differenze tra i poligoni e i contorni del cerchio, e con loro lo scarto tra p', q' e π.

Il metodo, sulla carta, è molto bello, ma ha un problema. In pratica, infatti, a ogni iterazione sono necessari degli arrotondamenti. A ogni tappa, dunque, i valori effettivamente calcolati per p' e q' non sono rigorosamente uguali a quelli dei poligoni corrispondenti, ma sono solo delle approssimazioni. Ed è qui che nasce il problema: chi ci garantisce che le approssimazioni fatte a ogni applicazione della formula di Archimede non abbiano un effetto valanga e non ci conducano a un risultato aberrante? È un'eventualità che va presa in considerazione ogni volta che si ha a che fare con un calcolo o che ci si avvicini a un risultato applicando ripetu-

tamente una o più formule. I problemi che oggi vengono risolti in questo modo sono tantissimi: può trattarsi delle previsioni del tempo, o della progettazione del profilo di un'ala di aereo. Come nel caso del calcolo di π, il problema è che il valore iniziale è noto con un certo margine di errore, e che anche la precisione dei calcoli successivi è limitata. Il problema della propagazione degli errori, quindi, è cruciale; uno dei modi per limitarne gli inconvenienti consiste nel partire da stime iniziali sufficientemente affidabili da garantire che la piccola sorgente di errore non abbia il tempo di propagarsi abbastanza da dar luogo a effetti realmente fastidiosi. Capita così che, per ottenere un risultato di cui alla fine si utilizzeranno poche cifre decimali, si debba passare per calcoli che ne utilizzano molte di più. Per fortuna di tutti quelli che se ne sono serviti per trovare i decimali di π, le formule di Archimede non propagano molto rapidamente gli errori di arrotondamento. Più in là (vedi l'appendice alla quinta parte) avremo l'occasione di occuparci di una situazione in cui, invece, gli arrotondamenti successivi generano velocemente problemi non indifferenti (per evitare qualsiasi estrapolazione impropria, segnaliamo che i record di calcolo dei decimali di π, che vengono battuti in continuazione – vedi cap. 15 –, non sono motivati direttamente dalla preoccupazione di evitare questo genere di problemi, ma dall'esigenza di testare la rapidità e l'affidabilità dei grandi computer; anche l'attuale detentore del record, Yasumasa Kanada, concorda sul fatto che per questo genere di test potrebbero andar bene i decimali di qualsiasi altro numero).

Quadrato o esagono?

Le formule di Archimede permettono di approssimare π con la precisione voluta, con l'unica condizione che i valori iniziali di p e q corrispondano ai perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti con un ugual numero di lati. Ora, non sono molti i poligoni regolari di cui sia facile calcolare direttamente il perimetro. Solo quelli con un massimo di 6 lati sono ragionevolmente utilizzabili. Il perimetro del pentagono (5 lati) porta a espressioni più complicate, e quindi non è mai stato utilizzato come punto di partenza. Dato che il triangolo equilatero, dal canto suo, può essere ricon-

dotto all'esagono regolare raddoppiando il numero dei lati, in pratica la scelta resta limitata a due poligoni: l'esagono e il quadrato. Archimede ha scelto l'esagono (e quindi una stima di $\sqrt{3}$), che dà un'approssimazione del cerchio migliore di quella che si ottiene dal quadrato. I matematici che dopo Archimede si sono spinti alla ricerca di nuovi decimali di π hanno seguito spesso la stessa strada: è il caso di Liu Hui, Aryabhata, Fibonacci, François Viète, Simon Van der Eycke, e Ludolph Van Ceulen. In altre occasioni, però, è stato il quadrato a essere prescelto come punto di partenza (in tal caso si ha $p = 2\sqrt{2}$ e $q = 4$): è il caso dei calcoli realizzati da Adriaan Van Roomen verso il 1600 (20 cifre decimali), da Van Ceulen poco tempo dopo aver realizzato il suo calcolo più preciso e più famoso (35 decimali), e da Willebrord Snell nel 1621 (34 decimali). Sempre partendo dal quadrato, nel XVI secolo François Viète pubblica nel suo *Variorum de rebus mathematicis responsorum, Liber VIII* questa formula inaspettata:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$$

Per ottenere due cifre decimali di π con il metodo di Archimede bisogna applicare quattro volte le formule precedenti per p' e q'. Per avere dieci decimali, bisogna spingersi a diciotto iterazioni, e per arrivare ai 35 decimali di Van Ceulen si passa a 58, senza dimenticare che ogni calcolo intermedio deve essere effettuato con una precisione almeno pari a quella del risultato atteso. Quest'ultimo particolare implica che per uguagliare il record di Van Ceulen bisogna estrarre 58 radici quadrate (a causa dell'espressione di p' in funzione di p e q') con una precisione di almeno 35 cifre decimali – di fatto, per questioni di arrotondamento, ne servono due o tre in più.

A partire dal XVII secolo – cioè dopo ben duemila anni, le nuove tecniche di analisi hanno permesso di calcolare i decimali di π con metodi nuovi e più efficaci, eliminando il ricorso all'estrazione di radici quadrate. Per queste ultime, però, non era stata ancora detta l'ultima parola: come vedremo nel capitolo 15, le ricerche dei decimali di π e di $\sqrt{2}$ si sono riunite nel 1976, e non sembrano affatto intenzionate a separarsi nuovamente.

Angoli e stelle Come spiegare i movimenti degli astri nel cielo? È un interrogativo che ha assillato tutte le civiltà per tante ragioni, dalla necessità di disporre di un calendario per conoscere con anticipo l'arrivo delle stagioni alla divinazione astrologica, passando per motivazioni di natura religiosa. Non avendo un accesso diretto alle stelle, l'unico tipo di misura possibile è stato, per molto tempo, di natura angolare. Una misura angolare, in particolare, consente di determinare l'altezza del Sole sull'orizzonte, o l'evoluzione della posizione di un «astro errante» (un pianeta) tra le stelle. Gli strumenti matematici indispensabili per una buona rappresentazione dei fenomeni osservati sono di competenza della scienza degli angoli, la «trigonometria», fondata dal greco Ipparco nel II secolo a. C. Anche nei problemi di cartografia terrestre si deve far ricorso a misure angolari: calcolo della latitudine e della longitudine di un luogo, misura della distanza tra due punti sulla superficie del globo per «triangolazione», determinazione della posizione di una nave in mare aperto e via dicendo.
Tra gli elementi trigonometrici principali di un angolo α troviamo il «seno», il «coseno», e la «corda», che si indicano rispettivamente con $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$ e $\mathrm{crd}(\alpha)$ e che corrispondono alle lunghezze s, c e r della figura seguente, in cui si presuppone che il cerchio abbia raggio uguale a 1.

Molto brevemente, l'interesse storico di queste funzioni trigonometriche sta nel fatto che, se si osserva la figura precedente, esprimere il valore di $\sin(\alpha)$ non vuol dire altro che determinare una *lunghezza* a partire da un *angolo*. Gli astronomi sono stati i primi a sfruttare la possibilità di trasformare gli angoli, facili da misurare, in distanze, grandezze molto meno accessibili.
Dato un angolo, come determinarne il seno o il coseno? Per alcuni angoli la risposta si può ottenere facilmente mediante un ragionamento geometrico. Questi valori speciali sono 30°, 45° e 60°, per i quali si

possono dimostrare le uguaglianze seguenti: $\cos(30°) = \sin(60°) = 1/2$, $\sin(30°) = \cos(60°) = \sqrt{3}/2$ e $\cos(45°) = \sin(45°) = \sqrt{2}/2$.
Esistono poi delle formule che consentono di calcolare le grandezze trigonometriche associate ad altri angoli a partire da queste prime uguaglianze. In particolare, se si conosce il valore del seno e del coseno di un angolo α, se ne possono dedurre il seno e il coseno dell'angolo $\alpha/2$: si tratta delle formule di bisezione, che possono essere espresse così: $\sin(\alpha/2) = \sqrt{((1 - \cos(\alpha))/2)}$ e $\cos(\alpha/2) = \sqrt{(((1 + \cos(\alpha))/2)}$. Applicando la prima delle due formule al caso dell'angolo $\alpha = 45°$, ad esempio, se ne deduce che $\sin(22{,}5°) = \sqrt{((1 - \sqrt{2}/2)/2)}$, che può essere riscritta come $(\sqrt{(2 - \sqrt{2})})/2$. Le formule di Archimede per l'approssimazione di π si interpretano ugualmente in termini di identità trigonometriche (si tratta, in questo caso, di quelle relative alla corda). Continuando con le bisezioni, si ottengono i seni e i coseni di vari angoli, che presentano una serie di radici quadrate «annidate» associate al numero π, come nella formula di Viète che abbiamo scritto poco fa (l'appendice alla sesta parte riporta un risultato generale sull'argomento).
Nel II secolo d. C., il greco Claudio Tolomeo scrive il *Grande trattato matematico*, la sintesi più brillante delle conoscenze astronomiche dell'epoca. Più nota, oggi, con il nome della sua traduzione araba (*Almagesto*), l'opera di Tolomeo detterà legge fino al XVI secolo e alla comparsa della teoria eliocentrica di Niccolò Copernico. Tolomeo fa un uso intensivo della trigonometria (in una forma che non era ancora quella che abbiamo appena presentato), grazie alla quale riesce a risolvere problemi di varia natura, come quello della lunghezza dell'ombra di un bastone piantato a mezzogiorno a Rodi il giorno del solstizio (*Almagesto*, II, 5). Ai suoi tempi la precisione nelle misure astronomiche è ancora modesta. In particolar modo, per gli angoli in cui interviene la radice quadrata di 2, Tolomeo si accontenta di una stima di $\sqrt{2}$ identica a quella fornita dalla tavoletta babilonese YBC 7289 (Tolomeo stesso si serve, per i suoi calcoli, di un equivalente della base 60), valore che ritroviamo anche in un altro contesto, quello del libro X degli *Elementi* di Euclide (vedi cap. 2) dove uno scolio accenna al fatto che in un quadrato di lato 5 la diagonale vale 7;4,15,50 (equivalente al valore della tavoletta YBC 7289). Successivamente, gli astronomi indiani, seguiti poi da quelli arabi, utilizzeranno tabelle di conversione più precise.

14.

Estrarre la radice quadrata di 2

Il paradiso perduto della periodicità

Dato che la radice di 2 è un numero irrazionale, i suoi decimali sono infiniti. Dobbiamo dedurne, quindi, che non riusciremo mai a conoscerli tutti? Non è detto: si potrebbe immaginare, infatti, che la successione delle cifre segua una regola di composizione identificabile, capace di fornirne una descrizione completa. Per capire bene questo punto dimentichiamo per un istante la radice di 2 e rivolgiamo la nostra attenzione ai numeri razionali. Il numero 11/6, ad esempio, è uguale a 1,833333...; analogamente, si ha 13/11 = 1,18181818..., o anche 16/7 = 2,28571428571428... Quello che tutti questi casi hanno in comune è il fatto che, a partire da un certo punto, le cifre si ripetono ogni volta in modo periodico: dei «3» nel primo calcolo, dei «18» nel secondo, dei «142857» nell'ultimo. Il caso non c'entra nulla. Esiste una regola generale per cui, per una coppia di interi p e q qualunque, l'espressione decimale del rapporto p/q è «periodica a partire da un certo rango», vale a dire che, a parte eventualmente all'inizio, la successione dei decimali è la ripetizione di un unico «periodo».

La dimostrazione di questa regola non è difficile. Illustriamola aiutandoci con l'esempio della divisione di 796 per 7, che scriveremo come si fa a scuola.

All'inizio, il quoziente della divisione dà dei decimali che non mostrano alcuna regolarità particolare. Si arriva a un punto in cui, avendo abbassato tutte le cifre del dividendo (796), per poter continuare la divisione si abbassano in maniera sistematica degli zeri.

```
796          | 7
09           |------------
 26          | 113,7142857...
  50         |
   10        |
    30       |
     20      |
      60     |
       40    |
        50   |
         1...|
```

Ora, ogni nuovo resto è, per definizione, inferiore al divisore (7), cioè a ogni tappa il resto è un numero (intero) compreso tra 0 e 6. Nella colonna dei resti, dunque, appariranno in sequenza solo i valori 00, 10, 20, 30, 40, 50 e 60: significa che prima o poi si finirà per ritornare a un valore già incontrato. La divisione entra così in un ciclo dal quale non uscirà più, ritornando regolarmente sugli stessi resti e producendo quindi al quoziente una sequenza di cifre che si ripete in modo periodico. Questo caso particolare può essere generalizzato senza problemi allo sviluppo decimale di qualsiasi numero razionale. Vale anche il reciproco: se lo sviluppo decimale di un numero è periodico, allora il numero è razionale (si veda l'inserto).

Un caso che può sembrare in contraddizione con quanto si è appena detto è quello di una divisione «giusta» (in cui, cioè, il resto è nullo). La frazione 13/5, ad esempio, è uguale a 2,6: qual è dunque il suo periodo? Per saperlo, basta scriverlo nella forma 2,60000... che mette in evidenza il periodo «0». Si può dimostrare che in base 10 le uniche frazioni di questo tipo sono quelle il cui denominatore ha come unici divisori 2 e 5. Analogamente, le frazioni «giuste» in base sessanta sono quelle il cui denominatore ha come unici divisori 2, 3 e 5. Perciò tutti i numeri decimali possono essere espressi in base sessanta con una quantità finita di cifre, ma non è vero il contrario, come si può vedere dalla traduzione in base dieci delle espressioni sessagesimali che compaiono sulla tavoletta babilonese YBC 7289 (vedi cap. 1).

Periodico, dunque razionale Consideriamo il numero $x = 6{,}5749749749749...$, caratterizzato da uno sviluppo decimale periodico (il ragionamento che segue può essere generalizzato senza problemi). Moltiplichiamolo per 10, e sottraiamo 65 dal risultato, ottenendo così $y = 10x - 65 = 0{,}749749749...$ La rappresentazione decimale di y è detta «periodica semplice», perché comincia subito con la ripetizione di un periodo (nella fattispecie, 749), a differenza del numero x, che mostra la propria periodicità solo dopo qualche cifra. Osserviamo che $1000y = 749{,}749749...$, cioè che $1000y = 749 + y$. Se ne deduce che $999y = 749$, ossia che $y = 749/999$. Con un rapido calcolo, poi, dall'uguaglianza $y = 100x - 65$ si trova che $x = 65\,684/99\,900$: non solo, dunque, abbiamo dimostrato che x è razionale, ma abbiamo anche trovato un mezzo efficace per esprimerlo sotto forma di frazione. Notiamo come si tratti praticamente dello stesso ragionamento effettuato nell'ambito dei numeri g-adici razionali (vedi cap. 8).

La periodicità dello sviluppo decimale di un numero razionale come 796/7 dimostra che, sebbene 796/7 possieda un'infinità di cifre dopo la virgola, è possibile descriverne *integralmente* lo sviluppo decimale senza doverlo scrivere tutto: una volta che la divisione entra in un circolo chiuso, i decimali non possono più riservarci sorprese. Ad esempio, per conoscere la millesima cifra dopo la virgola nel caso di 796/7, non serve continuare nella divisione fino al millesimo decimale; basta osservare che il risultato 113,7142857142857... è costituito da un periodo di sei cifre. In particolare, dopo la virgola, la cifra 7 si trova nelle posizioni 1, 7, 13, 19, 25, e così via; più generalmente, lo si ritrova nelle posizioni descritte da $1 + 6n$, dove n è un intero qualunque. L'ultimo 7 prima della millesima cifra decimale, dunque, si trova – come dimostra un calcolo semplicissimo – alla 997esima posizione. È seguito da un 1 in 998esima, da un 4 in 999esima e infine da un 2 in millesima posizione.

La periodicità dell'espressione decimale delle frazioni è nota almeno dal XII secolo, come testimonia Al-Samaw'al: questi, nel suo *Trattato di aritmetica*, fa l'esempio della frazione 4/11, di cui scrive l'inizio dell'espressione sessagesimale, 0;21,49,5,27,16 per poi

aggiungere che «questi cinque valori si ripetono indefinitamente [...] se si vuole [una stima più precisa] basta che ripetiamo questi cinque valori fino a una [posizione] più distante di queste posizioni». Qui, ovviamente Al-Samaw'al non sta utilizzando la base dieci (lo fa in altre occasioni, e sembra addirittura che sia stato lui il primo a interessarsi alla questione in modo rigoroso, dopo i primi lavori di Al-Uqlidisi di due secoli prima), ma non è difficile dimostrare che i risultati che abbiamo appena presentato valgono per ogni sistema di numerazione.

Torniamo alla radice quadrata di 2. Trattandosi di un numero irrazionale, quando abbiamo detto fin qui indica che la successione delle cifre decimali non è periodica. Tuttavia, dato che si tratta di uno dei numeri irrazionali più «semplici», ci si potrebbe aspettare, malgrado tutto, che anche la sequenza dei suoi decimali mostri una struttura semplice. Sembra, stranamente, che la questione di una struttura del genere non sia mai stata oggetto di una trattazione matematica chiara prima dei lavori del matematico Émile Borel, all'inizio del XX secolo. Fatto addirittura più curioso, ancora oggi la risposta è totalmente sconosciuta. Tra il calcolo dei decimali della radice quadrata di 2 in sequenza, da un lato, e, dall'altro, una conoscenza della loro regola di formazione abbastanza buona da poter determinare, ad esempio, il millesimo decimale di $\sqrt{2}$ senza dover prima calcolare tutti quelli che lo precedono, vi è una distanza abissale (nel capitolo 16 ritorneremo sulla questione dei decimali di $\sqrt{2}$ da un punto di vista più qualitativo).

L'ignoranza nella quale ci troviamo, quindi, ci obbliga ad affrontare – questa volta sul serio – quella che il linguaggio ormai desueto dei tempi in cui non c'erano ancora le calcolatrici designava con il nome di «estrazione delle radici quadrate».

Prendere $\sqrt{2}$ in una morsa

Il metodo più immediato per determinare i decimali di un numero come $\sqrt{2}$ è senza dubbio quello della «dicotomia», che consiste nel dare di $\sqrt{2}$ un'approssimazione per difetto e una per eccesso, per poi testare un valore intermedio; così facendo, si prende la radice di 2 in una morsa che, poco a poco, si stringe intorno al valo-

re vero, fornendo un numero di decimali sempre più elevato. Ecco un esempio di questo metodo: 1 è minore di $\sqrt{2}$, 2 è maggiore di $\sqrt{2}$. Si prova con 1,5, confrontandone il quadrato con 2: dal calcolo si trova che $1{,}5^2 = 2{,}25$, e dunque 1,5 è un valore troppo grande. Proviamo con 1,3: si ha $1{,}3^2 = 1{,}69$, e dunque 1,3 è troppo piccolo. Prendiamo 1,4: $1{,}4^2 = 1{,}96$, e dunque anche 1,4 è troppo piccolo. Adesso sappiamo che $\sqrt{2}$ è certamente compreso tra 1,4 e 1,5. Vediamo un po' se il quadrato di 1,45 è maggiore o minore di 2: i calcoli ci mostrano che $1{,}45^2 = 2{,}1025$, quindi $\sqrt{2}$ è minore di 1,45. Continuando così si trova che $1{,}43^2 = 2{,}0449$, $1{,}42^2 = 2{,}0164$, e $1{,}41^2 = 1{,}9881$: quindi $\sqrt{2}$ sta fra 1,41 e 1,42. Continuando nello stesso modo si otterrebbe una terza cifra decimale, poi una quarta, e così via.

La dicotomia ha il vantaggio di essere di una semplicità estrema, e presenta un interesse teorico dovuto al suo legame con lo sviluppo di un numero in base due (vedi cap. 19). La sua efficienza nell'ottenere i decimali di $\sqrt{2}$, invece, è scarsa. Per rendersene conto basta continuare il calcolo precedente. Una volta identificati n decimali, per identificare l'$(n + 1)$esimo tra i dieci possibili bisognerà effettuare, in media, 3 o 4 tentativi. Ora, all'aumentare della precisione aumentano le cifre decimali dei numeri che dobbiamo elevare al quadrato per confrontarli con il valore 2, e aumenta così anche il tempo necessario per elevarli al quadrato.

All'antica

Un antico metodo di estrazione delle radici quadrate, già menzionato dal cinese Sun Tzu nel IV secolo, viene descritto dall'indiano Aryabhata nel VI secolo in modo a dir poco ellittico: «Si dividerà sempre la parte non quadrata per il doppio della radice quadrata [che precede], dopo aver tolto dalla parte quadrata il quadrato della radice: il quoziente è la radice alla distanza di un posto». Il metodo sottinteso da queste parole è stato poi utilizzato nel Medioevo dagli Arabi, e successivamente dagli occidentali. Prima che arrivassero le calcolatrici, nella seconda metà del XX secolo, per chi si occupava di matematica si trattava di un metodo comune quanto lo sono le tecniche di addizione e di moltiplicazione dei numeri che

si imparano oggi a scuola. Il suo unico pregio è il fascino dell'antico; i lettori che avranno il coraggio di leggere la descrizione che stiamo per darne capiranno con la forza dell'esperienza quanto fossero giustificate le recriminazioni di chi, nei secoli passati, era obbligato a effettuare i calcoli soffrendo per la difficoltà e la lentezza.

Per questioni di spazio, ci accontenteremo di applicare il metodo, senza dimostrarlo, al caso dell'estrazione della radice quadrata del numero 209 254. Si comincia con l'inserire delle virgole così da formare raggruppamenti di due cifre, partendo da destra: si ha così 20,92,54 (se il numero fosse 1 209 254 si avrebbe 1,20,92,54). Il primo passo consiste nel prendere il considerazione la coppia di sinistra, 20, per determinare quale sia il più grande numero intero il cui quadrato sia inferiore a 20. In questo caso il numero è 4 ($4^2 = 16$, mentre $5^2 = 25$), che scriviamo a destra: sarà la cifra più significativa della radice quadrata di 209 254. Poi sottraiamo 4^2 da 20, ottenendo 4, che scriviamo sotto il 20. A questo punto si abbassano le due cifre della coppia successiva, e sotto il 4 di destra si scrive il suo doppio, 8. Si arriva così alla fine della prima parte, caratterizzata da una sequenza di calcoli un po' peculiare.

20,92,54	4
492	8

La seconda fase viene ripetuta più volte. Prendiamo in esame il numero formato dalle prime due cifre di 492, vale a dire 49, e dividiamolo per l'8 di destra: otteniamo 6 (con il resto di 1). Mettiamolo a destra del 4 (cioè al posto della seconda cifra più significativa della radice quadrata di 209 254) a patto che valga la condizione seguente: moltiplichiamolo per 8 (il numero in basso a destra), moltiplichiamo il risultato per 10 (la nostra base di numerazione), e aggiungiamo al totale il quadrato di 6 (il nostro quoziente precedente). Se il totale è minore di 492, allora il nostro 6 è davvero la seconda cifra più significativa della radice che stiamo cercando, e possiamo scriverlo a destra del 4. In questo caso particolare la condizione non è soddisfatta (il calcolo dà $6 \times 8 \times 10 + 6^2 = 516$): allora si diminuisce 6 di un'unità, ottenendo 5, e si rifà il test con 5, cioè si paragona $5 \times 8 \times 10 + 5^2$ a 492: questa volta il numero che si ottiene è 425, indubbiamente minore di 492 (se così non fosse stato, avremmo provato 4 al posto di 5, e così via); a destra del 4,

dunque, aggiungiamo il 5. Sottraiamo 425 da 492, ottenendo 67, e abbassiamo la coppia successiva, formando così il numero 6754. Raddoppiando 45 (proprio come avevamo raddoppiamo 4 in precedenza) si ottiene il valore 90, che riportiamo in basso a destra. I calcoli, dunque, cominciano ad avere questo andamento:

```
20,92,54      45
 492          8
 425
 ---
   6754       90
```

Dopo di che, si ricomincia allo stesso modo: si divide 675 (si toglie sempre l'ultima cifra) per 90, ottenendo per quoziente 7 (e 45 come resto). Si calcola il valore di $7 \times 90 \times 10 + 7^2$, ottenendo 6349, un numero minore di 6754: la terza cifra della nostra radice quadrata, quindi, è proprio 7. Non essendoci più porzioni di numero da abbassare, il calcolo può considerarsi concluso: la radice quadrata di 209 254, arrotondata all'intero inferiore, è uguale a 457. Per ottenere le cifre dopo la virgola, basta abbassare coppie di zeri (in altri termini: per avere una cifra dopo la virgola si parte da 20,92,54,00 anziché da 29,92,54; per averne due, si parte da 20,92,54,00,00 e così via). Gli Arabi del Medioevo (ad esempio Al-Uqlidisi, nel 952) davano a quest'idea di aggiungere coppie di zeri al numero di cui si vuole calcolare la radice quadrata il nome di «regola degli zeri», e ne utilizzavano anche delle generalizzazioni per le radici cubiche, quarte ecc.

Rettangoli che si trasformano in quadrati

Nel capitolo 10 abbiamo visto un altro modo di approssimare il valore della radice quadrata di 2: partendo da un rettangolo di lati 1 e 2 (e dunque con area uguale a 2), si sostituisce uno dei lati con la media aritmetica delle dimensioni del rettangolo (cioè 3/2) e l'altro con un segmento tale che l'area del nuovo rettangolo sia uguale a 2 (cioè 4/3, che corrisponde anche alla media armonica tra 1 e 2. L'operazione viene ripetuta a partire dal rettangolo risultante, per più volte: in tal modo la lunghezza e la larghezza del rettangolo tendono entrambe alla radice quadrata di 2.

Per essere più precisi, indichiamo rispettivamente con L e l la lunghezza e la larghezza del rettangolo risultante da una data iterazione, ed esaminiamo le dimensioni L' e l' del rettangolo che si ottiene all'iterazione successiva. Dato che L' è la media aritmetica di L e l, si ha $L' = (L + l)/2$. D'altro canto è vero che $L'l' = 2$, cioè $l' = 2/L'$, e quindi: $l' = 4/(L + l)$.

Ricordiamoci allora che il prodotto Ll vale 2, ovvero che $l = 2/L$, e sostituiamo l con quest'ultima espressione nell'uguaglianza $L' = (L + l)/2$. Riordinando, otteniamo:

$$L' = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$$

Mentre le formule precedenti partivano da l e L per calcolare l' e L', quest'ultima relazione indica come calcolare la successione delle lunghezze dei nostri rettangoli senza doverci preoccupare delle larghezze. Il numero di calcoli da effettuare si ritrova dimezzato, senza che si perda in precisione (tutte le stime di $\sqrt{2}$ ottenute dalle lunghezze sono stime per eccesso; per ottenere un'approssimazione per difetto a partire da una lunghezza L, basta calcolare $2/L$).

Partendo da $L = 2$ e applicando in maniera ripetuta l'operazione, si ottengono delle approssimazioni sempre più precise di $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$, come si può vedere dai primi valori:

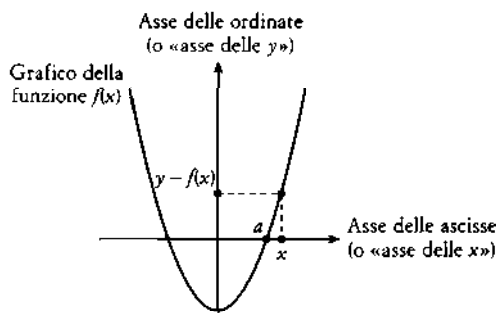
3/2	= 1,5
17/12	= 1,41666667...
577/408	= 1,41421568...
665 857/470 832	= 1,41421356...

Nella base sessanta, che era quella dei Babilonesi, i valori precedenti si scrivono così: 1;30 – 1;25 – 1;24,51,10,35... – 1;24,51,10,7...: la migliore approssimazione di $\sqrt{2}$ a tre ordini di grandezza sessagesimali, dunque, è 1;24,51,10: vi riconosciamo la stima riportata su YBC 7289 (vedi cap. 1). Quando a 1;25, la migliore approssimazione a un ordine sessagesimale, era conosciuta e utilizzata fin dall'epoca dei Seleucidi, ben prima di YBC 7289.

Il nome che si associa alla formula precedente è quello del greco Erone di Alessandria, vissuto nel I secolo d. C., che è stato il primo a citarla esplicitamente nelle sue *Metriche* (I,8). In maniera più generale, Erone indica che, partendo da un valore a prossimo a

$\sqrt{N}$, l'espressione $(1/2)(a + N/a)$ approssima $\sqrt{N}$ meglio di a, e che il processo può essere ripetuto all'infinito per ottenere approssimazioni sempre migliori (per dimostrare questa formula più generale il ragionamento geometrico precedente può essere adattato senza difficoltà).

La formula di Erone possiede due grandi qualità che ne fanno un metodo eccellente per estrarre le radici quadrate. La prima è la velocità. Si può dimostrare che si tratta di una formula «a convergenza quadratica», cioè, in parole povere, che il numero di decimali esatti per $\sqrt{2}$ raddoppia ogni volta. Partite da un'approssimazione a una cifra decimale, e applicate la formula di Erone: le approssimazioni successive di $\sqrt{2}$ danno dapprima due decimali esatti, poi quattro, poi otto, e così via. La seconda qualità fondamentale della formula di Erone è il suo carattere «autocorrettivo». Significa che se, nel corso di un'iterazione qualsiasi, si commette un errore di calcolo, le conseguenze sulle operazioni successive non sono gravi. Nel fare un'operazione avete dimenticato un riporto? Il computer ha fatto le bizze sugli arrotondamenti? Nulla di grave: a meno che non si commettano a ogni passo errori sempre più macroscopici, l'applicazione ripetuta della formula di Erone vi porterà comunque verso $\sqrt{2}$!

È curioso come, nonostante queste due virtù fondamentali, la formula di Erone non sia stata utilizzata più spesso nel corso della storia. Tutti gli studenti dell'epoca in cui non esistevano ancora le calcolatrici hanno dovuto imparare faticosamente l'estrazione «all'antica», al tempo stesso difficile, lenta e drammaticamente sensibile al minimo errore di calcolo. Anche se l'utilizzo delle tavole logaritmiche (vedi cap. 13) consentiva indubbiamente ai matematici di procedere più speditamente, si osserva in epoche ancora relativamente recenti il ricorso a metodi di calcolo decisamente meno efficaci. René Coutsal, ad esempio, che nel 1950 ha calcolato a mano più di un migliaio di decimali di $\sqrt{2}$ per stabilire il nuovo record (vedi cap. 15), ha utilizzato la formula seguente, di cui non daremo la dimostrazione:

$$\sqrt{2} = a\left(1 + x + \frac{1\times 3}{1\times 2}x^2 + \frac{1\times 3\times 5}{1\times 2\times 3}x^3 + \frac{1\times 3\times 5\times 7}{1\times 2\times 3\times 4}x^4 + \ldots\right)$$

in cui a è un valore approssimato di $\sqrt{2}$ già noto, e x è il valore $1/2 - a^2/4$. Coutsal ha calcolato a mano i quattro termini del membro di destra di questa uguaglianza, utilizzando per a un'approssimazione di $\sqrt{2}$ a 433 decimali che aveva calcolato in precedenza. Così facendo, ha ottenuto i primi 1032 decimali di $\sqrt{2}$. Si può rendere omaggio al suo coraggio e a quello degli altri calcolatori suoi contemporanei (vedi cap. seguente), ma non si può fare a meno di pensare che questo modo di procedere spiega bene quanto poco si sapesse, a quei tempi, delle problematiche della velocità di calcolo. Per non essere troppo severi, notiamo ugualmente che le prime reali riflessioni teoriche sull'argomento si sono avute solo con la nascita dell'informatica, una disciplina che agli inizi degli anni cinquanta stava ancora muovendo i primi passi.

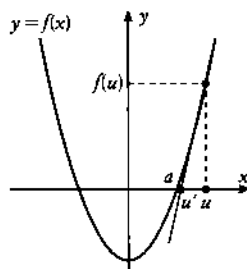
Da Erone ai computer

Prima dell'esistenza dei computer, i tempi necessari per portare a termine una moltiplicazione o una divisione erano paragonabili. Da allora le cose sono cambiate, e riuscire a evitare le divisioni quando si deve fare un calcolo ha un'importanza cruciale se si vuole vincere la sfida della velocità. La formula di Erone contiene una divisione per 2 e una divisione per L: la prima non è un problema serio, nella misura in cui, se si lavora in base due come fanno i computer, dividere per 2 è molto semplice (l'operazione corrisponde al semplice spostamento della virgola, in maniera del tutto analoga a ciò che capita in base 10 quando si divide un numero per dieci). La divisione per L, invece, è un punto delicato, cui gli informatici si sono sforzati di porre rimedio.

Per capire come ci siano riusciti faremo una deviazione, e esamineremo un metodo di calcolo inventato nel 1671 da Isaac Newton che consente di determinare con la precisione desiderata una grande classe di numeri, gli «zeri di una funzione». Una funzione, ricordiamolo, è una regola che associa a un numero x un numero y secondo modalità predefinite. Se si indica la funzione con f, $y = f(x)$ significa che y è «l'immagine di x data dalla funzione f». Spesso, per lavorare con una funzione, la rappresentazione grafica costituisce un aiuto prezioso.

L'immagine di un numero x si ottiene prendendo l'intersezione del grafico della funzione f con la retta verticale che interseca l'asse delle ascisse nel punto di ascissa x. L'ordinata y di tale intersezione è l'immagine di x, $f(x)$.

Nella figura precedente, l'ordinata del punto del grafico con ascissa a è uguale a 0; in altri termini, $f(a) = 0$: si dice che a è uno «zero» della funzione. Sono molti i problemi matematici riconducibili alla ricerca degli zeri di una funzione: è il caso, tra gli altri, del calcolo della radice quadrata di 2. Consideriamo, infatti, la funzione f che fa corrispondere a ogni x il valore $f(x) = x^2 - 2$. Tra i valori che possiamo calcolare abbiamo $f(1) = (1)^2 - 2 = -1$, $f(2) = 2^2 - 2 = 2$, e anche $f(\sqrt{13}) = (\sqrt{13})^2 - 2 = 11$. Un valore a tale che sia $f(a) = 0$ soddisfa la relazione $a^2 - 2 = 0$, cioè $a^2 = 2$, e quindi $a = \sqrt{2}$ o $a = -\sqrt{2}$. Voler determinare uno zero della funzione definita da $f(x) = x^2 - 2$, dunque, è un modo alternativo di dire che si sta cercando di valutare la radice quadrata di 2.

Da un punto di vista geometrico, il metodo di Newton funziona così: partendo da una prima approssimazione, u, dello zero che si sta cercando, si traccia la tangente al grafico della funzione f nel

punto di coordinate $(u, f(u))$ e si indica con u' la sua intersezione con l'asse delle ascisse.

Dalla figura si vede che u' è più vicino di u ad a: ci siamo avvicinati allo zero ricercato. Allora basta ripetere la procedura prendendo u' come nuovo valore al posto di u, così da avvicinarsi ulteriormente ad a, e così via. Si può dimostare che u' è deducibile da u attraverso la formula seguente:

$$u' = u - \frac{f(u)}{f'(u)}$$

Il valore $f'(u)$, la «derivata di f in u», è per definizione la «pendenza» della tangente al grafico nel punto di coordinate $(u, f(u))$, cioè, grosso modo, l'inclinazione della tangente rispetto all'asse orizzontale.

Per calcolare $\sqrt{2}$ con il metodo di Newton, la cosa più semplice consiste nel partire dalla funzione $f(u) = u^2 - 2$. Si dimostra che la sua derivata vale $f'(u) = 2u$, e dunque la formula precedente diventa:

$$u' = u - \frac{u^2 - 2}{2u}$$

Semplificando il membro di destra, otteniamo

$$u' = \frac{u}{2} + \frac{1}{u}$$

cioè nient'altro che la formula di Erone!

Ora torniamo al nostro obiettivo iniziale, che è quello di liberarci della divisione per u in questa formula. A tale scopo, consideriamo la funzione $f(x) = 2 - 1/x^2$: la radice quadrata di 2 non è uno zero di questa nuova funzione f, ma i calcoli dimostrano che adesso è $\sqrt{2}/2$ a esserlo. Nessun problema: il metodo di Newton ci avvicinerà a $\sqrt{2}/2$, e quando ci saremo abbastanza vicini basterà moltiplicare per 2. Attraverso i risultati classici della teoria della derivazione delle funzioni si dimostra che $f'(u) = 2/u^3$. Semplificando, allora, la formula di Newton dà

$$u' = \frac{3u}{2} - u^3$$

Miracolo: la divisione per u è scomparsa! Grazie a questa proprietà, la formula precedente è attualmente la più utilizzata per il

calcolo dei decimali della radice di 2. Ovviamente esistono altri metodi (recentemente Xavier Gourdon e Pascal Sebah ne hanno catalogati diversi), alcuni dei quali convergono molto più rapidamente della formula appena considerata, se non fosse per il fatto che la maggior lunghezza dei calcoli da effettuare annulla i vantaggi pratici. Per quanto ne sappiamo, non si è ancora trovato un teorema che stabilisca la velocità massima alla quale è possibile calcolare i decimali di $\sqrt{2}$ tenendo conto del tempo necessario a effettuare i calcoli. Sembra poco probabile che si riesca ad andare significativamente più veloci della formula precedente.

Ciò non vuol dire che la storia finisca qui. Da qualche anno si stanno facendo passi avanti sul modo migliore di ripartire i calcoli tra macchine diverse: stiamo parlando della «parallelizzazione». Nel caso di una parallelizzazione ideale, il numero totale dei calcoli effettuati è lo stesso, ma la loro suddivisione tra computer diversi fa sì che il tempo totale necessario per il calcolo vada teoricamente diviso per il numero di macchine. In pratica, però, la suddivisione dei calcoli è di difficile realizzazione, e dunque anche se si raddoppia il numero di macchine a disposizione, il tempo di calcolo non si dimezza. La parallelizzazione del calcolo dei decimali della radice di 2 ha occupato una parte della tesi presentata nel 1998 dal giapponese Daisuke Takahashi, il quale detiene, insieme a Yasumasa Kanada, il record del numero di decimali di $\sqrt{2}$. Nonostante i grandi progressi compiuti, quindi, la ricerca di metodi più veloci per calcolare la radice quadrata di 2 non è finita.

15.

Cacciatori di decimali

Se esiste un numero per il quale la storia della caccia ai decimali è di per sé un vero e proprio romanzo, si tratta senza ombra di dubbio del numero pi greco. La ricerca millenaria dei decimali di π segue una trama straordinariamente ricca che attraversa i secoli e le civiltà, inoltrandosi in più di un campo della matematica, dalla geometria all'informatica passando per l'analisi. Incominciata ai tempi di Archimede, e già narrata più volte, la storia del calcolo dei decimali di π è di un'attualità immutata: dagli anni cinquanta in poi, con l'avvento dei computer, il record viene battuto in media una volta all'anno.

La storia del calcolo dei decimali della radice quadrata di 2, dal canto suo, sembra sconosciuta. Se cercassimo il nome di un matematico divenuto famoso grazie a questo calcolo, resteremmo delusi. Eppure, per quel poco che sappiamo, il palmarès dei cacciatori di decimali della radice di 2 è il solo a poter rivaleggiare, in qualche misura, con quello di pi greco. Ancora più inaspettato è il fatto che, a causa dei molteplici legami tra i due numeri, dietro un record per π se ne nasconde spesso uno per $\sqrt{2}$.

Nell'ombra di π

Come mai il calcolo dei decimali di π ha sempre assicurato ai suoi autori una notorietà maggiore di quella dovuta agli analoghi calcoli per $\sqrt{2}$? Abbiamo individuato due elementi che possono contribuire alla spiegazione. Anzitutto, il calcolo dei decimali di $\sqrt{2}$ (a

mano e *a fortiori* servendosi di strumenti informatici) è, per così dire, *troppo facile*, e la tecnica migliore attualmente a nostra disposizione, che altro non è che il metodo di Erone (vedi cap. precedente), era sostanzialmente conosciuta già ai tempi dei Babilonesi. Siamo di fronte, dunque, a un raro – se non addirittura unico – esempio di tecnica di calcolo avanzato il cui principio sia rimasto praticamente invariato dall'epoca in cui fu redatta la tavoletta babilonese YBC 7289 fino ai software di calcolo di alta precisione dei nostri giorni. Un fatto del genere merita di essere sottolineato: nel XX secolo, l'avvento dell'informatica ha rinnovato in profondità la nozione stessa di calcolo, a tal punto che risulta difficile trovare una tecnica di calcolo tradizionale che sia riuscita a sopravvivere ai progressi nel campo dei computer. Eppure, se si eccettua qualche modifica di poca importanza, il miglior metodo di estrazione delle radici quadrate, utilizzato in tutti i computer, potrebbe essere stato scoperto tra il Tigri e l'Eufrate più di tremila anni fa. Nonostante il suo fascino sul piano storico, però, questo aspetto della radice quadrata di 2 non ha il carattere romanzesco delle formule sempre più bizzarre utilizzate nel corso dei secoli per calcolare π.

Un secondo elemento per comprendere la differenza tra π e $\sqrt{2}$ è legato al fatto che la natura irrazionale di quest'ultima era nota già nell'antichità, mentre è solo nel 1761 che Johann Lambert ha dimostrato che neanche π è il risultato della divisione di due numeri interi. Calcolare i decimali di π poteva essere un modo di far luce su almeno una parte del suo mistero. Notiamo come oggi la situazione si sia capovolta: sono le stesse cifre decimali, di $\sqrt{2}$ così come di π, a essere al centro di una delle principali questioni relative a questi due numeri, quella della loro «normalità» (vedi cap. seguente).

La caccia ai decimali: palmarès a confronto

Abbiamo cercato di ricostruire con la massima precisione possibile il palmarès dei record di calcolo dei decimali di $\sqrt{2}$, ma dal momento che siamo partiti da zero o quasi, è praticamente sicuro che quanto segue sia un quadro tutt'altro che completo, per quanto se ne possano intuire le linee principali.

I Babilonesi mettono subito l'asticella molto in alto, stimando $\sqrt{2}$ con una precisione di un decimillesimo. La famosa tavoletta YBC 7289, di cui abbiamo già parlato a lungo (e che potrebbe anche non essere la più antica sull'argomento) aumenta notevolmente il vantaggio di $\sqrt{2}$, rendendo il rapporto tra la diagonale e il lato di un quadrato il numero irrazionale conosciuto con la miglior precisione, e tutto ciò circa duemila anni prima della nostra era. Per avere una stima altrettanto precisa, il numero π deve aspettare la fine del V secolo, quando il cinese Tsu Ch'ung-Chih scopre l'approssimazione $\pi \approx 335/113$ (chiamata spesso «quoziente di Mezio», essendo stata riscoperta in Europa da Adriano Mezio... undici secoli dopo).

Dato l'interesse per una valutazione precisa di un valore come $\sqrt{2}$ in relazione alla sua importanza nelle tavole trigonometriche ($\sqrt{2}$ è il doppio del seno della metà dell'angolo retto – vedi cap. 13), era lecito aspettarsi che gli astronomi non ci avrebbero messo molto a battere il record. Per quel che ne sappiamo, invece, la più antica tavola trigonometrica da cui si deduca un valore di $\sqrt{2}$ più preciso risale solo alla fine dell'VIII secolo, se non all'inizio del IX: è quella dell'indiano Govindaswamin, che ci dà un'approssimazione di $\sqrt{2}$ a sette cifre decimali. A partire dal IX secolo, anche gli astronomi arabi si interessano alle tavole trigonometriche; ogni astronomo pubblica le sue, con un livello precisione che varia da un autore all'altro. Sia gli Arabi che gli Indiani, comunque, realizzano le proprie tavole trigonometriche servendosi soprattutto di tecniche dette di «sviluppo in serie», nelle quali, a differenza dei metodi basati sulle formule di bisezione (vedi cap. 13), l'angolo di 45° non svolge alcun ruolo particolare. È più o meno «per caso», quindi, che da tali tavole si possono dedurre delle approssimazioni per $\sqrt{2}$.

Tra i matematici, l'arabo Al-Uqlidisi utilizza effettivamente la radice quadrata di 2 nel suo trattato del 952 come esempio per illustrare la «regola degli zeri» (vedi cap. precedente); il suo obiettivo, però, è quello di descrivere i metodi di estrazione di radici quadrate, e non di battere un record, e così non si spinge molto lontano in quello che per lui non è altro che un esempio. La precisione che ottiene è di un decimillesimo, inferiore a quella dei Babilonesi (va detto, però, che i suoi metodi di calcolo gli avrebbero consentito di andare oltre).

Nel XVI secolo, nel suo *Responsum ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianum Roma-*

nus, il francese François Viète dà per $\sqrt{2}$ una lista di 48 cifre dopo la virgola (la quarantottesima è sbagliata). Qualche anno dopo, Briggs si servirà di 32 decimali di $\sqrt{2}$ per elaborare la sua tavola dei logaritmi (vedi cap. 13).

$$\text{R. } 3\ \frac{4142,1356,2373,0950,4880,1688,7242,0969,8078,5696,7187,5375}{10000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000,0000}.$$

I decimali di $\sqrt{2}$ dati da Viète, in forma di frazione in cui il denominatore è una potenza di dieci (in realtà Viète si interessa al numero $2 + \sqrt{2}$). Il valore dell'ultimo decimale, 5, è sbagliato: la cifra giusta è 6 (cui seguono un 9 e un 4). © BNF.

Nel 1887, Marcus Boorman calcola 520 decimali di $\sqrt{2}$, ma dichiara di essere sicuro solo dei primi 486. Già a quei tempi il prestigio di pi greco si traduce in una netta superiorità del numero di decimali noti: William Shanks, che nel 1853 ne aveva già calcolati 530, nel 1873 si era spinto fino a 707 (con qualche errore che poi lui stesso aveva corretto).

Nel 1950, il francese René Coutsal invia all'Accademia delle Scienze una comunicazione contenente le prime 1032 cifre decimali di $\sqrt{2}$, ottenute mediante una formula (vedi cap. precedente) che utilizza già al suo interno una stima di $\sqrt{2}$ a 433 decimali: Coutsal afferma di averla «calcolata alcuni anni prima» (ma sembra non averla mai pubblicata). Pur garantendo la correttezza dei suoi calcoli, Coutsal non fornisce tutti i decimali che ha ottenuto con il suo lavoro manuale, ma afferma che «il 1033esimo decimale è sicuramente uno zero, e probabilmente il 1034esimo è un 5». Le due cifre sono effettivamente corrette.

Il record di Coutsal non dura molto: nel 1951, Horace Uhler, inizialmente all'oscuro del lavoro del francese, si accinge a verificare i decimali forniti da Boorman. A tale scopo utilizza il metodo impiegato ancora oggi: eleva il numero considerato (chiamiamolo x) al quadrato; se il risultato è abbastanza vicino (in un senso quantitativo preciso di cui non daremo i dettagli) al valore 2, allora il numero x dà effettivamente i primi decimali di $\sqrt{2}$. Il verdetto di Uhler è inappellabile: solo i primi 315 decimali di Boorman sono esatti. Uhler effettua quindi un calcolo manuale per ottenerne altri, e arriva a 611. Un anno prima, John Wrench, anche lui all'oscuro del record di Coutsal, calcola 460 decimali: il confronto con i 611

di Uhler conferma l'esattezza dei primi 460. Alla fine del 1951, infine, Uhler pubblica i primi 1542 decimali, approfittandone per confermare i 1032 di Coutsal, nonché il 1033esimo e il 1034esimo che questi aveva dato senza garanzie di esattezza. È l'ultimo record stabilito a mano: da quel momento irrompe sulla scena un nuovo strumento di calcolo, il computer.

Un'arma nuova: il computer

Nonostante la rivoluzione scatenata dall'informatica nel campo del calcolo, i cacciatori di decimali di $\sqrt{2}$ sembrano non avere fretta. Già nel 1949, cioè due anni prima di Uhler e uno prima di Coutsal, l'esercito americano mette in campo il suo primo calcolatore, l'ENIAC, per calcolare 2035 cifre decimali di π, per superare i 1542 decimali di $\sqrt{2}$ trovati da Uhler bisogna aspettare il 1967, quando Koki Takahashi e Masaaki Sibuya pubblicano la lista dei primi 14 000 decimali di $\sqrt{2}$ (il cui calcolo, in realtà, risale al 1966). Quello stesso anno, Mohan Lal ne trova 19 600, che diventano 39 000 nel 1968, mentre la soglia dei 100 000 decimali viene raggiunta qualche mese più tardi da Fred Lunnon. Nel 1971, infine, Jacques Dutka raggiunge il milione di cifre decimali.

Contemporaneamente, vengono infranti altri tipi di record: nel 1967, ad esempio, Irving Good e Tim Gover, aiutati da Lunnon, si interessano allo sviluppo binario di $\sqrt{2}$, e ne pubblicano le prime 10 000 cifre. Con una serie di tre lavori usciti tra il 1969 e il 1970, anche William Beyer, Nicholas Metropolis e J. Neergaard si interessano ad altre basi di numerazione, e pubblicano, in particolar modo, 88 062 cifre di $\sqrt{2}$ in base 2 (che poi convertono in 24 576 decimali), nonché altre stime di radici quadrate in varie basi.

Se all'epoca il progresso nella conoscenza dei decimali di $\sqrt{2}$ può sembrare rapido, il paragone con pi greco è istruttivo. Infatti, nonostante il calcolo dei decimali sia molto più semplice per $\sqrt{2}$ che per π, il vantaggio di quest'ultimo è praticamente ininterrotto, quantomeno da quando si rendono disponibili le tecniche di calcolo adeguate. Il divario tra i decimali noti per π e $\sqrt{2}$ alla fine del 1967, ad esempio, ha qualcosa di comico: ai miseri 19 600 decimali di $\sqrt{2}$ calcolati da Lal si contrappongono i 500 000 di π calcolati

da Jean Guilloud e M. Dichampt servendosi di una formula di Gauss, ($\pi = 48\arctan(1/18) + 32\arctan(1/57) - 20\arctan(1/239)$).

Dall'inizio dell'era informatica, la radice di 2 è passata in vantaggio solo in due brevi occasioni. La prima, durata due anni, comincia nel 1971 con il milione di cifre decimali date da Dutka, e finisce nel 1973, quando Jean Guilloud e Martine Bouyer riprendono il comando di misura con 1 001 250 decimali (calcolati sempre con la formula di Gauss). Dopo di che, pi greco spicca il volo verso cime ben più alte. Abbiamo cercato invano le tracce di nuovi record di decimali per $\sqrt{2}$ fino agli anni novanta. Nel 1994, tuttavia, Robert Nemiroff e Jerry Bonnell danno 10 milioni di decimali, anche se non sono in grado di garantirne l'esattezza al di là di 5 milioni. Vale la pena di ricordare che in quello stesso anno David e Gregory Chudnovsky superano i 4 *miliardi* di decimali di π...

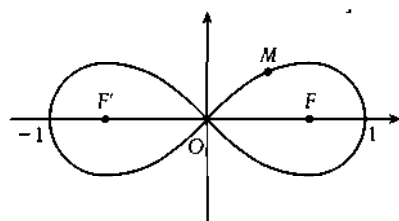
Nel 1997, infine, Yasumasa Kanada e Daisuke Takahashi portano nuovamente un po' di splendore al record dei decimali della radice di 2: grazie a una macchina potentissima, la Hitachi SR2201, che esegue calcoli per 7 ore e 31 minuti (verifiche comprese), superano i 137 miliardi di decimali. Per la precisione, ne calcolano esattamente $2^{37} - 30$, iterando 34 volte l'algoritmo di Newton (che permette di evitare le divisioni) a partire da un valore iniziale con 17 cifre decimali. Il «-30» viene dagli errori di arrotondamento che si accumulano nel corso dei calcoli. I decimali di $\sqrt{2}$ dalla posizione n. 137 438 953 217 alla n. 137 438 953 266 sono i seguenti:

8913458017 7391236935 4900286855 3714574742 2009047472

Quello stesso anno, facendo funzionare lo stesso computer per quasi 38 ore di fila, i due giapponesi battono il record di cifre decimali di π, e lo portano a 51 miliardi: il prestigio di π incita all'impiego di risorse sempre più grandi... A un certo punto della corsa all'approssimazione decimale, in realtà, $\sqrt{2}$ riprende il comando, ma il primo posto dura poco: già nel 1999 gli stessi Kanada e Takahashi riportano in vantaggio π, con più di 206 miliardi di decimali.

Dunque la radice quadrata di 2 è condannata al secondo posto? A guardar meglio, la situazione non è così netta. Non è un caso, infatti, che Kanada e Takahashi detengano i record di decimali sia per $\sqrt{2}$ che per π. La spiegazione è di natura matematica: dal 1976, per fare progressi con i decimali di π è spesso necessario fare progressi con quelli di $\sqrt{2}$.

I destini incrociati di $\sqrt{2}$ e π

Il metodo di approssimazione di π dovuto ad Archimede, utilizzato fino al XVII secolo, aveva già fatto incontrare π e $\sqrt{2}$ (vedi cap. 13). In seguito, con la comparsa di nuovi metodi per calcolare π, più efficienti di quello di Archimede, i destini delle due costanti si erano separati. E anche se la radice quadrata di 2 appare in una formula, piuttosto complicata, proposta dal matematico Srinivasa Ramanujan nel 1914, bisogna comunque aspettare il 1976 perché $\sqrt{2}$ ricompaia realmente: è la conclusione di un cammino a dir poco tortuoso, che comincia nel XVII secolo, con l'interesse per la lunghezza di una curva particolare, la lemniscata di Bernoulli. Si tratta di una curva definita a partire da due punti F e F' in un piano, che vengono detti «fuochi». La lemniscata corrisponde all'insieme dei punti M per i quali il prodotto $MF \cdot MF'$ delle distanze, rispettivamente, tra M e F e tra M e F', è uguale a una costante: quest'ultima è determinata dalla condizione che il punto medio del segmento $[FF']$ appartenga alla curva (in altri termini, per ogni punto M della lemniscata deve valere la relazione $MF \cdot MF' = (FF'/2)^2$. Con alcune semplici trasformazioni geometriche si può portare il punto medio del segmento $[FF']$ nell'origine O di un sistema di riferimento tale che i due punti più lontani della lemniscata giacciano sull'asse delle ascisse a distanza 1 dall'origine O. Ogni risultato valido per questa forma «normalizzata» della lemniscata può essere applicato senza difficoltà a qualunque altra curva dello stesso tipo.

Nel caso della lemniscata della figura precedente, si dimostra che i fuochi si trovano a distanza $1/\sqrt{2}$ dall'origine O. Una definizione equivalente di questa lemniscata è la seguente: l'insieme dei punti M

per i quali la distanza r dall'origine e l'angolo θ tra l'asse delle ascisse e la semiretta $[OM)$ sono legati dalla relazione $r^2 = \cos(2\theta)$.

A partire dal 1691 Jacques Bernoulli si interessa alla determinazione della lunghezza di questa curva, una grandezza che il tedesco Carl Gauss,uno dei matematici più illustri di ogni tempo, considererà come abbastanza importante da meritare una notazione specifica: ϖ («pi script»). Il suo valore approssimato è 2,622; Bernoulli dimostra che se ne può dare un'espressione in «forma integrale» che, in teoria, permette di determinarla con la precisione desiderata.

La situazione non cambia fino alla fine del XVIII secolo, quando Louis Lagrange, e poi soprattutto Gauss, si interessano a qualcosa che sembra non aver assolutamente nulla a che fare con la lemniscata, e che oggi porta il nome di «algoritmo della media aritmetico-geometrica», o AGM (*arithmetic-geometric mean*). In questo algoritmo, si parte da due numeri a e b di cui si calcola la media, rispettivamente, aritmetica $((a + b)/2)$ e geometrica $(\sqrt{(ab)})$; si ottengono così due nuovi numeri, di cui si calcolano la media aritmetica e quella geometrica, e così via. Si può dimostrare che più si va avanti, più i numeri delle nuove coppie così ottenute tendono a un valore comune, indicato con $M(a,b)$, cui ci si riferisce alquanto impropriamente come alla media aritmetico-geometrica di a e b.

La relazione inaspettata tra la lunghezza della lemniscata e la media aritmetico-geometrica è data da Gauss, che il 30 maggio 1799 scrive nel suo diario: «Ho dimostrato che le prime 11 cifre decimali della media aritmetico-geometrica di 1 e $\sqrt{2}$ sono le stesse di π/ϖ; la dimostrazione di questo fatto aprirà sicuramente nell'analisi un campo di ricerca totalmente nuovo». Il primo ad avventurasi in quel campo è proprio Gauss, arrivando in particolare a ottenere un nuovo metodo per il calcolo degli «integrali ellittici» (per una presentazione del concetto di integrale si veda la fine del cap. 10). Chiamati così per il ruolo che svolgono nel calcolo della circonferenza di un'ellisse, vale a dire di un cerchio osservato con una certa inclinazione (vedi cap. 11), gli integrali ellittici compaiono in molte situazioni diverse, tra cui l'analisi fisica del pendolo.

La dimostrazione rigorosa, da parte di Gauss, dell'uguaglianza $M(\sqrt{2}, 1) = \pi/\varpi$, giungerà solo nel 1818 (le prime cifre dell'espressione decimale di questo numero sono 1,19814023473559220744).

Anche se non ne dimostreremo la validità, illustriamone comunque l'essenza. Come forse il lettore avrà notato, l'algoritmo della media aritmetico-geometrica ricorda per certi versi il metodo di estrazione delle radici quadrate che abbiamo presentato nel capitolo 10 (vedi cap. precedente), dove il valore di $\sqrt{2}$ è ottenuto come «media aritmetico-armonica» di 1 e 2. Ricordiamo rapidamente che l'algoritmo consiste nel calcolare la media aritmetica e la media armonica di a e b, per poi ricominciare con i due numeri così ottenuti, e così via: le la successione delle coppie di numeri risultanti tende alla media geometrica di a e b, cioè a $\sqrt{(ab)}$. Una proprietà fondamentale di queste coppie di numeri ottenute per iterazioni successive è che il loro prodotto è costante ed è uguale ad ab: ciò consente di formulare una versione geometrica dell'algoritmo, basata su rettangoli di area costante la cui forma si avvicina sempre di più a quella di un quadrato.

Per l'uguaglianza scoperta da Gauss le cose sono abbastanza simili, anche se a un livello tecnicamente più complicato. Nel caso della media aritmetico-geometrica, non è più il prodotto dei numeri di ogni coppia a rimanere costante, ma il loro «integrale ellittico completo di prima specie», che si indica con $I(a,b)$ e che è legato a $M(a,b)$ dalla relazione $M(a,b) \cdot I(a,b) = \pi/2$. Quando $a = 1$ e $b = \sqrt{2}$, l'integrale ellittico corrispondente è pari alla metà della lunghezza della lemniscata, da cui deriva l'uguaglianza di Gauss.

Gauss vedeva nella relazione $M(a,b) \cdot I(a,b) = \pi/2$ uno strumento per calcolare gli integrali ellittici. Nel 1976, Eugene Salamin e Richard Brent, manipolando ulteriormente tali integrali, ne hanno ricavato un metodo per calcolare le cifre decimali di π. Sarebbe troppo lungo entrare nei dettagli del loro lavoro, ma possiamo comunque dire che i loro calcoli, in fondo, non sono eccessivamente complicati. Nel suo articolo di sole sei pagine, d'altra parte Salamin lo riconosce: «È alquanto sorprendente che un formula per π ottenibile così facilmente sia rimasta sconosciuta, a quanto pare, per 155 anni» (l'autore precisa che la sua scoperta risale al 1973). Ancora più sorprendente, poi, è il fatto che la formula sia stata scoperta indipendentemente da due persone, e quasi in contemporanea!

L'algoritmo di Brent-Salamin (su cui troverete qualche informazione più dettagliata nell'inserto) è a convergenza quadratica (vedi cap. precedente), il che significa che il numero di decimali esatti

raddoppia a ogni passo. Da quando è stato pubblicato, è raro che i record di decimali di π non siano battuti grazie a qualcuna delle sue varianti, che ricorrono tutte all'uso di $\sqrt{2}$, e dunque richiedono che se ne conoscano molti decimali.

La formula di Brent-Salamin è la seguente:

$$\pi = \frac{4 \cdot M(1,k) \cdot M(1,k')}{1 - \sum_{j=1} 2^j (c_j^2 + c_j'^2)}$$

In questa formula, c_j e c_j' sono valori definiti a partire dalle medie aritmetico-geometriche, rispettivamente, di 1 e k e di 1 e k' (per la precisione: c_j è la radice quadrata della somma dei quadrati dei due numeri della j-esima tappa del calcolo di $M(1,k)$, e c_j' è l'analogo per $M(1,k')$). I valori k e k', dal canto loro, possono essere scelti in maniera arbitraria, con l'unica condizione che sia soddisfatta la relazione $k^2 + k'^2 = 1$. Per ridurre i calcoli necessari, si prende k uguale a k', il che, unito alla condizione precedente, dà $k = k' = 1/\sqrt{2}$: in un certo senso, è il ritorno del triangolo rettangolo isoscele! La formula assume così una forma più concisa:

$$\pi = \frac{4 \cdot M(1,1/\sqrt{2})^2}{1 - \sum_{j=1} 2^{j+1} c_j^2}$$

In pratica, l'utilizzo della formula di Brent-Salamin è due volte più rapido per $k = k' = 1/\sqrt{2}$ che per qualsiasi altro valore di k e k'.

Due numeri inseparabili

In pratica, non si ottiene un record di decimali di π unicamente a partire da un solo algoritmo: la regola vuole che, per avere la garanzia di un record, si utilizzi un secondo metodo per calcolare i decimali in maniera indipendente, convalidando così il risultato ottenuto. A tale scopo, si può notare, come aveva fatto Salamin, che la formula di Brent-Salamin è in realtà un insieme di formule, di cui quella che implica l'uso di $\sqrt{2}$ è preferibile solo per ragioni di rapi-

dità. Dal canto suo, il gruppo giapponese guidato da Kanada, da anni in prima posizione nella corsa al record, ha spesso utilizzato a complemento dell'algoritmo di Brent-Salamin una formula concepita da Jonathan e Peter Borwein nel 1987 e rivelatasi anche lei molto efficace da implementare. Sorpresa: anche questo secondo metodo utilizza la radice quadrata di 2, decisamente insostituibile. Per gli amanti delle belle formule, ecco come funziona: si parte da $a = 6 - 4\sqrt{2}$ e $y = \sqrt{2} - 1$. Quindi si sostituisce y con

$$\frac{1 - \sqrt{\sqrt{(1 - y^4)}}}{1 + \sqrt{\sqrt{(1 - y^4)}}}$$

e a con

$$a(1 + y)^4 - 2^5 y(1 + y + y^2)$$

Dopo di che si ripetono i due passaggi, aggiungendo ogni volta 2 all'esponente del 2 che compare nella seconda formula (in tal modo, 2^5 diventa 2^7 al secondo giro, poi 2^9, e così via). Il teorema di Borwein afferma che i valori di a ottenuti successivamente attraverso la ripetizione dei passaggi precedenti tendono a $1/\pi$, e che lo fanno in modo «quartico», vale a dire che il numero di decimali esatte viene moltiplicato ogni volta per quattro.

La maggior parte degli ultimi record di decimali di π è stata ottenuta con i due algoritmi precedenti, con qualche miglioria. Perciò, a voler leggere tra le righe, dietro tanti record di decimali di π si nasconde un record equivalente per $\sqrt{2}$, e per nessun altro numero. La superiorità schiacciante di π, però, emerge da un fatto: per applicare le due formule precedenti e riuscire così a estrarre 206 miliardi di decimali di π, Kanada e Takahashi, logicamente, hanno prima dovuto conoscere $\sqrt{2}$ con la stessa precisione. È così che, prima di calcolare π, Kanada e Takahashi hanno calcolato 206 miliardi di decimali per $\sqrt{2}$, stabilendo il record che dura tuttora. Ma quegli stessi decimali, non abbastanza prestigiosi, sono stati cancellati dalla memoria del computer, per motivi di spazio!

Come riconosce volentieri Takahashi, oggi il suo attuale record di cifre decimali di $\sqrt{2}$ non ha nulla di impressionante: teniamo presente che il gruppo di Kanada ha utilizzato più di 300 ore di calcolo per calcolare 1000 miliardi di decimali di π, ma che ne sono bastate poco più di 7 per il loro penultimo record di 137 miliardi decimali per $\sqrt{2}$... Dal punto di vista della ricerca dei decimali, dunque,

la radice quadrata di 2 ha il ruolo dell'eterna seconda, ben lontana da π ma anche decisamente in vantaggio sul numero e, di cui Xavier Gourdon e Shigeru Kondo hanno calcolato 50 miliardi di decimali nel 2003, e sul numero aureo $(1 + \sqrt{5})/2$, calcolato da Xavier Gourdon e Pascal Sebah nel 2002 con un po' più di 3 miliardi di cifre decimali (più precisamente, ne hanno calcolato 3,141 miliardi: è di nuovo π che fa capolino?)

Già per Archimede l'estrazione delle radici quadrate era stata solo uno strumento per trovare il valore di π. Anche i calcoli di Kanada e dei suoi, così come quelli di altri prima di loro, consacrano la subordinazione della ricerca dei decimali di $\sqrt{2}$ a quella dei decimali di pi greco. Ovviamente è possibile che i metodi ereditati dal XVII secolo, e che non utilizzano $\sqrt{2}$ nel calcolo di π, ritornino in scena in modo durevole (è il caso del record attualmente valido, quello di Kanada del 2002). In caso contrario, i due numeri saranno condannati a un risultato di parità.

16.

Il caso e la normalità

È possibile che i primi a considerare la questione della ripartizione dei decimali di $\sqrt{2}$ siano stati i pensatori arabi del Medioevo, nel chiedersi se Dio potesse conoscere o no la totalità dei decimali della radice quadrata di un numero intero. Certo, l'invocazione dell'onniscienza divina implicava una risposta positiva, a differenza di chi riteneva che una radice quadrata, non avendo un «valore esatto», fosse inconoscibile per natura. Le loro riflessioni, però, non si sono spinte oltre. Dopo tutto, la radice quadrata di 2 è un numero ben definito, per il quale, come abbiamo visto, disponiamo di un algoritmo di calcolo dei decimali tanto semplice quanto efficace. La storia sarebbe potuta finire qui.

Nel 1909, invece, il francese Émile Borel formula la seguente domanda: nella successione dei decimali di un numero come $\sqrt{2}$, la cifra 0 compare con la stessa frequenza della cifra 1, del 2, o di qualsiasi altra cifra? Guardando qua e là «a caso» nell'espressione decimale di $\sqrt{2}$, si hanno le stesse probabilità di finire su una sequenza di cinque zeri, ad esempio, o sulla sequenza 94284? Questi interrogativi di natura qualitativa si sono rivelati molto più difficili della ricerca di metodi di calcolo dei decimali, e costituiscono oggi la prospettiva principale della caccia ai decimali, per $\sqrt{2}$ così come per altri numeri, ad esempio π. All'inizio del XXI secolo, le domande sull'argomento sono ben più numerose delle risposte.

Decimali imprevedibili

Scegliamo un sistema di numerazione, diciamo la base due, e scriviamo una sequenza di cifre dopo la virgola secondo una regola qualsiasi, ad esempio 0,101001000100001... Ci si aspetta che le proprietà matematiche dell'oggetto così costruito riflettano, in un modo o nell'altro, la regola che determina la successione delle cifre. In particolar modo, nel capitolo 14 abbiamo visto che se la regola è periodica, cioè se impone la ripetizione perpetua di una certa sequenza, allora il numero è razionale (ad esempio, il numero che in base due si scrive come 0,101010101010... è uguale a 2/3).

Il fatto che la successione delle cifre ottenute mediante la regola «dividere 2 per 3 e scrivere il risultato in base due» sia periodica è una caratteristica fondamentale del nostro sistema di numerazione, che consente di separare i numeri razionali da quelli irrazionali in un modo che più netto non si può. Insomma, i Babilonesi, che, imitati poi dagli Indiani, ebbero l'idea di un sistema del genere, non chiedevano così tanto! E dato che il sistema è così efficace nel distinguere i razionali, viene la tentazione di andare oltre: esiste un criterio per determinare con maggior precisione la natura di un numero sulla base del suo sviluppo decimale (o binario, o altro)? Ad esempio, la sequenza dei decimali della radice quadrata di 2, aperiodica in virtù dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$, possiede una struttura identificabile?

Se una struttura simile esiste, allora la sequenza dei decimali possiede senza dubbio proprietà statistiche particolari. Borel, proponendosi di identificarne qualcuna, ha definito la nozione di «normalità». Per definizione, è normale (sottinteso: in base dieci) qualsiasi numero la cui espressione decimale è tale che qualunque sequenza finita di cifre vi compare con la stessa frequenza di qualsiasi altra sequenza di uguale dimensione. In altri termini: vi compaiono «altrettanto spesso» gli 1, i 2, i 3 ecc., e «altrettanto spesso» i 27543, i 93689, i 77777 e così via. In parole povere, quindi, se si estrae «a caso» una cifra decimale tra tutte quelle di un numero normale, si ha una possibilità su dieci di finire su un 1, una su dieci di ottenere 2, eccetera. Analogamente, una sequenza di tre cifre ha una possibilità su 1000 di essere la sequenza 000, una su mille di essere 002, 003, e così via fino a 999.

Alla luce della semplicità e della varietà delle definizioni della radice quadrata di 2, della facilità con cui è possibile calcolarne i decimali, e della quantità di formule in cui interviene, verrebbe da pensare che la questione della normalità di $\sqrt{2}$ possa essere risolta con una certa facilità. Nulla di tutto ciò: questioni molto più limitate, e dunque, in linea di principio, più «facili», come quella di sapere se la cifra 7 compaia o meno un'infinità di volte nell'espressione decimale di $\sqrt{2}$, non hanno una risposta ben definita. Certo, esistono almeno due cifre che compaiono un'infinità di volte nel suo sviluppo decimale (altrimenti a partire da un certo momento si vedrebbe solo una e una sola cifra, il che renderebbe periodica l'espressione decimale di $\sqrt{2}$ mentre sappiamo che è irrazionale). Una proprietà del genere, però, è molto debole, e tra l'altro è comune a tutti i numeri irrazionali. E non si può fare a meno di constatare che un secolo dopo i lavori pionieristici di Borel non abbiamo fatto grandi passi avanti sull'eventuale normalità di $\sqrt{2}$.

Che utilità potrebbe mai avere una risposta a questa domanda? Sul piano pratico, la necessità di poter disporre di sequenze di numeri aleatori ha una grande rilevanza economica: ogni giorno vengono effettuati molti calcoli ad alta precisione mediante tecniche dette pseudo-aleatorie, che introducono una dose di «falso caso» attraverso sequenze di numeri costruite a partire da un algoritmo (e quindi deterministiche) ma dotate di caratteristiche statistiche che le rendono simili a sequenze aleatorie. Un problema tuttora attuale è quello di trovare algoritmi in grado di generare sequenze con un comportamento statistico opportuno. Se la successione delle cifre decimali di $\sqrt{2}$ dimostrasse di avere tali proprietà statistiche (tra cui la normalità – ma non solo), la si potrebbe usare come sequenza pseudo-aleatoria.

Gli algoritmi utilizzati attualmente per generare sequenze pseudo-aleatorie sono in grado di produrre numeri con una rapidità molto più grande di quella con cui il metodo di Erone genera i decimali di $\sqrt{2}$, e dunque l'utilizzo diretto dei decimali di $\sqrt{2}$ (o di un numero analogo) non è ancora all'ordine del giorno. Malgrado tutto, e sempre nell'ipotesi che la teoria finisca per dimostrare che i decimali di $\sqrt{2}$ hanno le giuste proprietà statistiche, nulla vieta di immaginare un algoritmo che si serva dei decimali di $\sqrt{2}$, ad esempio, per definire un «seme» (il numero che funge da punto di partenza

per il generatore di numeri pseudo-aleatori, e a partire dal quale vengono determinati i numeri successivi). Resta il fatto che, attualmente, non è la teoria a dare un fondamento a un utilizzo pratico, ma è il calcolo effettivo dei decimali di $\sqrt{2}$ che aiuta a farsi un'idea sulle questioni teoriche.

I numeri normali sono eccezionali?

La problematica dei numeri normali ha alcuni punti in comune con quella dei numeri «trascendenti», che tiene desto l'interesse dei matematici da quasi duecento anni. Il concetto di trascendenza, in un certo modo, è un'estensione di quello di irrazionalità: le espressioni del tipo p/q (con p e q interi) non consentono di rappresentare tutti i numeri, in particolar modo a causa di numeri come $\sqrt{2}$? Allora arricchiamo il nostro repertorio con tutti quelli che possono essere scritti attraverso radici quadrate, radici cubiche, ecc., come $\sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\sqrt[5]{(3 + \sqrt{7})}$, o $\sqrt[8]{(3/5)} + 1(2 + \sqrt[4]{11})$. In questo modo riusciamo a ottenere tutti i numeri? La risposta è no: a meno di qualche restrizione di natura tecnica (che rende la definizione un po' più complicata), diciamo che i numeri che sfuggono a questo modo di rappresentazione sono i numeri «trascendenti», la cui esistenza è stata dimostrata nel XIX secolo.

Le problematiche della trascendenza e della normalità hanno una caratteristica comune: possono essere suddivise in tre grandi sottoproblemi: costruire numeri che godano della proprietà desiderata, sapere se sono «maggioritari» tra i numeri e, infine, determinare se numeri «di uso corrente» come π, e o $\sqrt{2}$ hanno o meno tale proprietà.

Su questi tre sottoproblemi si è lavorato molto per quello che riguarda i numeri trascendenti: Joseph Liouville costruisce i primi nel 1844, e nel 1873 Georg Cantor dimostra che sono «in maggioranza tra i numeri»; quanto ai numeri di uso corrente, se è chiaro che $\sqrt{2}$ non è trascendente, bisogna aspettare il 1873 perché Charles Hermite dimostri che il numero e lo è, dopo di che tocca a Ferdinand Lindemann, nel 1882, dimostrare che anche π lo è; infine, il XX secolo è stato ricco di risultati più generali.

Per i numeri normali, i progressi sono stati molto diversi. Nel 1909, Émile Borel dimostra che, in un senso matematicamente ben

preciso, «quasi tutti i numeri» sono normali. In parole povere: se si sceglie un numero «a caso», allora, per così dire, si hanno «grandissime probabilità» di finire su un numero normale. In realtà, però, i numeri normali non sono così comuni, ed è molto più facile trovare esempi di numeri che *non sono* normali. Nonostante il risultato di Borel, bisogna attendere anni perché si trovi in maniera esplicita un numero normale! Dopo i primi lavori che Wacław Sierpiński e Henri Lebesgue pubblicano nel 1917, è nel 1933 che David Champernowne dà l'esempio più esplicito e semplice di numero normale. Il numero di Champernowne si ottiene concatenando la successione degli interi positivi nel modo seguente:

0,12345678910111213141516171819202122232425262728293031323334...

Nel 1952, Harold Davenport e Paul Erdős dimostrano un risultato più generale: se P è una funzione «polinomiale» (cioè che a ogni x associa un numero esprimibile come $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots$ $\dots a_2x^2 + a_1x + a_0$, dove $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1$ e a_0 sono numeri prefissati) tale che $P(n)$ è un intero positivo per qualsiasi intero positivo n, allora il numero che si ottiene concatenando l'espressione in base dieci di $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, eccetera (il tutto preceduto da «0,») è normale in base dieci. Il numero di Champernowne corrisponde al caso particolare in cui $P(x) = x$ per ogni valore di x; se si prende $P(x) = x^2$, si ottiene $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$, $P(4) = 16$, $P(5) = 25$ ..., e quindi il risultato di Davenport e Erdős consente di affermare che il numero 0,1491625... è normale in base 10. In seguito sono stati trovati nuovi esempi, ma per quanto possano essere interessanti, nessuno di loro risponde alla domanda, tuttora aperta, sulla normalità di numeri di uso corrente come π, e e $\sqrt{2}$.

I primi passi del XXI secolo

Alcuni risultati pubblicati di recente hanno portato nuovi elementi a favore dell'idea che $\sqrt{2}$ sia un numero normale. Il primo di questi, ottenuto da David Bailey, Jonathan Borwein, Richard Crandall e Carl Pomerance, risale al 2004, e ha a che fare con la base 2. Gli autori hanno dimostrato che gli zeri presenti nelle prime k pri-

me cifre dello sviluppo di $\sqrt{2}$ in base 2 sono almeno dell'ordine di $\sqrt{k}$ (il loro risultato, in realtà, è più generale, e non si limita esclusivamente alla radice quadrata di 2).

Quello stesso anno, Boris Adamczewski, Yann Bugeaud e Florian Luca hanno dimostrato un altro risultato, che invece è valido in qualsiasi base e la cui applicazione alla radice quadrata di 2 dà quanto segue. Scriviamo $\sqrt{2}$ in una base qualsiasi, e scegliamo un intero positivo k. Se la radice quadrata di 2 è normale nella base considerata, allora tutti i numeri a k cifre si trovano da qualche parte nella sequenza delle sue cifre. Se anche solo uno di loro viene a mancare all'appello, invece, allora $\sqrt{2}$ non è normale. Ovviamente, anche se i numeri ci sono tutti, la normalità non è una conseguenza automatica, perché poi bisogna capire con che frequenza si ripetono. Malgrado tutto, sapere che tutte le sequenze di cifre appaiono almeno una volta sarebbe già un indizio importante. Per ogni intero k, definiamo il valore $p(k)$ come il numero di sequenze distinte di k cifre che possono essere identificate nello sviluppo di $\sqrt{2}$. Se si lavora in base dieci, ad esempio, e si parte dal presupposto della normalità di $\sqrt{2}$, allora si è spinti a ritenere che $p(k) = 10^k$ per ogni valore di k, dato che il numero di sequenze di k cifre, in base dieci, è pari esattamente a 10^k (da 000...000 a 999...999). Il risultato di Adamczewski, Bugeaud e Luca, pur non spingendosi fino a questo punto, indica comunque che «il rapporto $p(k)/k$ non è limitato», cioè può esser grande a piacere, il che implica che $p(k)$ è «nettamente più grande di k per molti valori di k».

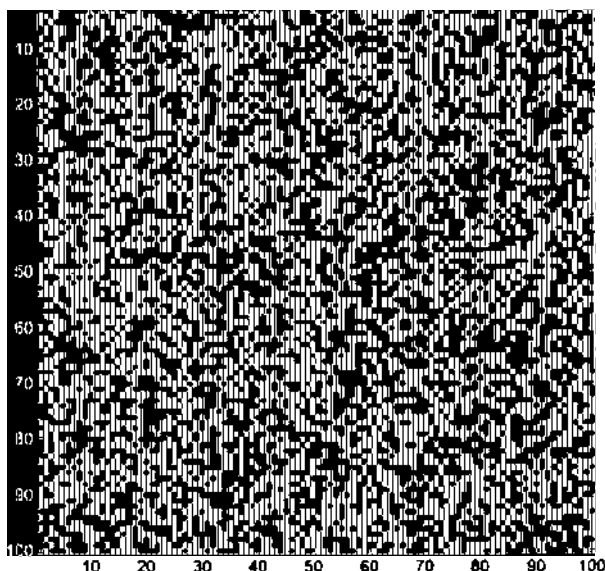
Entrambi questi risultati possono sembrare poco significativi: c'è una grossa differenza tra il valore $\sqrt{k}$ e l'orizzonte ultimo dell'equilibrio tra gli 0 e gli 1 dato dal valore $k/2$, così come c'è una differenza enorme tra l'essere molto più grande di k ed essere uguali a 10^k per ogni intero k. Si tratta comunque dei primi passi su un cammino che promette di essere lungo.

Nel 1997 si sono avuti i primi segni di una possibile differenza tra i decimali di π e di $\sqrt{2}$, quando Bailey, Borwein e Plouffe hanno mostrato come si fa a calcolare una cifra qualsiasi dello sviluppo di π in base due senza dover calcolare le cifre precedenti. La stessa tecnica può essere applicata ad altri numeri, come π^2, ma non sappiamo ancora se può funzionare per $\sqrt{2}$. Simon Plouffe ritiene di no (storicamente, d'altra parte, Plouffe aveva comincia-

to a occuparsi dell'argomento per i numeri come $\sqrt{2}$, ma aveva dovuto «ripiegare» su altri numeri, come π, che hanno finito per rivelarsi meno ostici). Se si scoprisse che per $\sqrt{2}$ non esiste un algoritmo equivalente a quello di Bailey-Borwein-Plouffe per π, potrebbe trattarsi dell'indicazione di una differenza profonda nella struttura dei decimali di queste due costanti fondamentali della matematica, anche se, *a priori*, ciò non impedirebbe ai due numeri di essere entrambi normali, o non normali.

Sarebbe decisamente rischioso formulare un pronostico sul primo numero di uso comune di cui si dimostrerà la normalità (o la non normalità). D'altra parte, chi può escludere che un legame tra π e $\sqrt{2}$ del tipo di quelli evocati nel capitolo precedente permetterà di dare una risposta per uno dei due a partire dalla risposta trovata per l'altro? Non sarebbe il primo esempio del genere: la trascendenza di π è stata dimostrata da Lindemann proprio a partire dalle idee sviluppate da Hermite per dimostrare quelle di e.

La spirale di Ulam è una rappresentazione della lista dei numeri primi immaginata dal matematico Stanislaw Ulam (che è anche, insieme a Nicholas Metropolis, uno degli inventori del «metodo Montecarlo» su cui si fondano alcune tecniche di calcolo che utilizzano le successioni pseudo-aleatorie, di cui abbiamo parlato poco fa). L'idea, concepita nel 1963 nel corso di un seminario particolarmente noioso, è quella di formare una griglia di quadretti numerati in ordine crescente, cominciando dal quadretto centrale e procedendo con la numerazione secondo una spirale. Ogni volta che un quadretto è associato a un numero primo (un numero divisibile solo per 1 e per se stesso), lo si annerisce. La celebrità della spirale di Ulam deriva dal fatto che la ripartizione tra quadretti bianchi e neri mostra, inaspettatamente, una certa regolarità; il problema della ripartizione dei numeri primi è uno dei più difficili della matematica contemporanea, e la spirale di Ulam, pur non risolvendolo, ha dato l'occasione di fare qualche osservazione a riguardo.
La figura seguente, realizzata per l'occasione da Marie-Claude Werquin, è un adattamento della spirale di Ulam alle prime diecimila cifre dello sviluppo in base due della radice quadrata di 2. La casella centrale (colorata di grigio, alle coordinate (50, 50)) indica la par-

te intera di $\sqrt{2}$ (cioè 1); tutt'intorno si avvolgono le cifre della rappresentazione binaria di $\sqrt{2}$ secondo la regola seguente: 0 = quadretto bianco, 1 = quadretto nero. La spirale gira in senso orario, cominciando dalla casella immediatamente a destra di quella centrale. Ecco, quindi, l'inizio dello sviluppo di $\sqrt{2}$ in base 2: 1,0110101000 00100111100110...
Chissà, forse il problema della ripartizione qualitativa dell'espressione binaria di $\sqrt{2}$ potrebbe essere affrontato servendosi della spirale di Ulam. Magari basterebbe guardare bene la diagonale...

Conti e statistiche

La difficoltà della questione della normalità di $\sqrt{2}$ ha spinto i matematici a ripiegare sull'analisi statistica delle prime cifre decimali, nella speranza di chiarirsi le idee. Il primo ad aver svolto un'analisi del genere sembra essere stato René Coutsal, nel 1950, in occasione del calcolo delle prime 1032 cifre decimali di $\sqrt{2}$. Nel commentare il proprio risultato, Coutsal spiega che «[Le frequen-

ze con cui appaiono le dieci cifre] hanno l'andamento che ci si potrebbe aspettare da un numero le cui cifre decimali siano estratte a caso». Secondo Borel, che è dello stesso avviso, «sembra probabile che la frequenza delle 10 cifre decimali [di $\sqrt{2}$] sia la stessa, cioè pari a 1/10 per ognuna di esse».

Avendo ben presente la questione della normalità di $\sqrt{2}$, Borel va oltre, e osserva che, anche se si dimostrasse che la frequenza di apparizione di ognuna delle cifre è effettivamente uguale a 1/10, «potrebbe capitare, ad esempio, che la probabilità di incontrare 10 zeri consecutivi sia inferiore di quella che si avrebbe nel caso di un'estrazione a sorte. In effetti non è affatto scontato che l'uguaglianza delle frequenze valga anche nei sistemi di numerazione aventi per base un numero molto grande; in tale circostanza si potrebbe immaginare che lo zero si distingua dalle altre cifre (magari insieme a quelle più basse)». Ciò che vuol dire Borel è che, per essere sicuri di aver a che fare con un numero normale, non basta che le dieci cifre compaiano tutte con la stessa frequenza, come dimostra il numero razionale 0,12345678901234567890l2345...: il periodo di quest'ultimo è 0123456789, e dunque tutte le cifre appaiono con la stessa frequenza, eppure il numero non è normale, già solo per il fatto che nella successione dei suoi decimali non compare la sequenza 77.

Borel spiega che, anche se avessimo la garanzia della normalità di $\sqrt{2}$, «ciò non implicherebbe necessariamente che la successione indefinita delle sue cifre decimali possiede *tutte* le proprietà di una serie di cifre scelte a caso. La sequenza delle cifre di $\sqrt{2}$, infatti, obbedisce necessariamente a una legge, essendo determinata; ma quale sia questa legge, non lo sappiamo». In altre parole, come si capisce dal numero di Champernowne, un numero normale non è per forza un numero in cui la successione delle cifre «assomiglia molto» a una sequenza di cifre scelte a caso: anche se il numero di Champernowne ha l'aria di essere normale, infatti, la sequenza dei suoi decimali non assomiglia per niente a una sequenza aleatoria.

Dal 1950 a oggi sono molti i test statistici classici che sono stati applicati ai decimali della radice quadrata di 2 (test «del chi quadro», delle «sequenze ascendenti» ecc.), ma nessuno di loro è riuscito a identificare uno scarto significativo tra le proprietà statistiche dei primi decimali di $\sqrt{2}$ e quelle di una sequenza di cifre estratte a

caso. Takahashi, attuale detentore, insieme a Kanada, del record di decimali noti di $\sqrt{2}$, ha messo in evidenza qualche semplice dato statistico sui primi cento miliardi di decimali. Ecco, per cominciare, la frequenza delle cifre da 0 a 9:

0	9999946091
1	10000062987
2	9999903614
3	9999996931
4	9999963242
5	9999985234
6	9999930492
7	10000091438
8	10000105868
9	10000014103

Takahashi, inoltre, ha fornito alcune ulteriori statistiche sui decimali da lui calcolati, in particolare le «sequenze ascendenti» più lunghe, che contengono undici cifre (tra parentesi, la posizione dei decimali a partire dai quali si osservano le sequenze):

45678901234	(4 027 971 080esima)
78901234567	(21 932 314 878esima, 51 177 313 690esima)
89012345678	(28 522 096 911esima, 56 308 436 119esima, 88 773 299 248esima, 121 646 429 299esima)
01234567890	(88 055 854 279esima)
23456789012	(33 960 124 767esima, 41 669 414 929esima, 101 708 237 670esima, 104 668 656 044esima)
56789012345	(128 693 866 283esima, 132 288 691 729esima)

C'è poi una sequenza «discendente» a dodici cifre: 321098765432, che comincia alla 31 561 102 674esima cifra decimale, e ci sono sequenze discendenti a undici cifre, una delle quali compare tredici volte. Compare anche una sequenza di dodici 0 (a partire dalla 64 678 262 264esima cifra decimale), insieme ad altre formate da undici cifre identiche.

Altri studi sono più approfonditi sul piano teorico, pur basandosi su un minor numero di cifre decimali. Nel 1997, ad esempio, Steve Pincus e Rudolf Kalman hanno studiato la cosiddetta «entropia approssimata» dei decimali di $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π ed e. Introdotta da Pin-

cus nel 1991, l'entropia approssimata di una successione (finita o infinita) di cifre quantifica grossolanamente la probabilità che, avendo trovato nella successione dei decimali di $\sqrt{2}$ due zone con la stessa sequenza di cifre (ad esempio, due punti in cui compaia la sequenza 5382), anche il decimale immediatamente successivo sia lo stesso (ad esempio, se dopo la prima sequenza 5382 c'è un 7, si tratta di valutare la probabilità che anche dopo la seconda sequenza 5382 ci sia un 7). Anche in questo caso i risultati non consentono di trarre conclusioni definitive, anche se, rispetto all'entropia approssimata, i quattro numeri sembrano manifestare proprietà leggermente differenti. Nella sua espressione in base due, $\sqrt{2}$ sembra avere una regolarità intermedia tra π (il più irregolare di tutti) ed e (più regolare, anche se meno di $\sqrt{3}$). In base dieci, invece, le differenze tra i quattro numeri sembrano molto meno pronunciate.

Su un piano più aneddotico, infine, citiamo il compositore Jean-Philippe Fontanille, che qualche anno fa, con l'aiuto del matematico Jean-Paul Delahaye, ha composto un brano in cui ogni nota è determinata a partire dallo sviluppo di alcuni numeri irrazionali in base sette, secondo la corrispondenza *do* = 0, *re* = 1, *mi* = 2, e così via. Secondo lui non tutti i numeri danno origine a brani di qualità equivalente; la sua opinione è che tra tutti i numeri sottoposti al suo test musicale, la radice quadrata di 2 sia quello che dà origine al tema più melodioso, seguita dal numero aureo, da π e infine dal numero e. Certo, nessuno è in grado di trarne conclusioni di ordine matematico!

«Uno dei problemi più importanti che i matematici abbiano mai dovuto affrontare»

Una pietra, per quanto forte venga lanciata, finisce sempre per ricadere a terra. Analogamente, un computer, per quanto possa lavorare, darà sempre un risultato limitato, a differenza dei decimali della radice quadrata di 2. L'analisi statistica dei primi decimali, dunque, consente al massimo di farsi un'idea, ma non di risolvere una questione teorica come quella della normalità di $\sqrt{2}$.

A tale proposito, l'opinione degli specialisti non è unanime, anche se la maggior parte di loro ritiene che la radice quadrata di 2 sia

davvero un numero normale. Da un lato, l'estrema semplicità della definizione di $\sqrt{2}$ e la facilità con la quale se ne possono calcolare i decimali tende a deporre a sfavore della normalità di $\sqrt{2}$, nella misura in cui ci si può aspettare che più è semplice la costruzione dei decimali di un numero, più è grande la probabilità che questi seguano una legge che impedisce al numero di essere normale, analogamente a quanto capita con i numeri razionali. La semplicità, però, non è un argomento decisivo, come dimostra il numero di Champernowne, che è al tempo stesso normale e di facile costruzione.

È anche lecito pensare che se i decimali della radice quadrata di 2 obbedissero a delle regole statistiche particolari, facendone un numero non normale, probabilmente le regole in questione sarebbero già state messe in evidenza dai test statistici. Il ragionamento ricorda quello utilizzato da Lambert nell'introduzione all'articolo in cui dimostrava l'irrazionalità di π: «Se fosse necessaria una frazione assai composta, quale ragione ci sarebbe, perché una invece di un'altra? [...] così come, dopo la frazione [22/7] data da Archimede, che è solo un'approssimazione, si passa a quella di Mezio [355/133], anch'essa inesatta, e i cui numeri sono decisamente più grandi, si è decisamente portati a concludere che la forma di tale successione, ben lungi dall'essere uguale a una frazione semplice, è una quantità irrazionale». Espressa in termini più comprensibili: se π fosse una frazione, avrebbe di sicuro un numeratore e un denominatore di dimensioni «ragionevoli», che quindi sarebbero già stati trovati da un sacco di tempo... Il ragionamento non è privo di interesse, ma, come Lambert si affretta a precisare, nessuno si sognerebbe di metterlo sullo stesso piano della dimostrazione matematica rigorosa che lui stesso fornisce di lì a poco!

Attualmente, comunque, l'argomento migliore a favore della normalità di $\sqrt{2}$ resta l'analisi statistica, che per il momento non mostra alcuna deviazione significativa rispetto a un comportamento aleatorio dei decimali. È possibile, però, che il numero di decimali oggi noti non sia abbastanza grande da potersi fidare? Dopo tutto, il record di decimali di $\sqrt{2}$ di Kanada e Takahashi è stato ottenuto applicando il metodo di Erone-Newton solo 34 volte, che non sono tantissime. Forse, perché ci si possa fidare delle statistiche bisognerebbe avere a disposizione una quantità di decimali corrispondente a centinaia, o addirittura migliaia di iterazioni del metodo

di Erone-Newton. Oggi il prestigio della radice quadrata di 2 non è così elevato da spingere a imprese del genere, in cui le chance di scoprire qualche elemento nuovo sono tutt'altro che scontate.

In ogni caso, la difficoltà del problema posto da Borel e la lentezza dei progressi compiuti negli ultimi decenni lasciano pensare che la persona, o le persone, che risolveranno la questione della normalità di $\sqrt{2}$, così come quella di π, e o altri numeri «comuni», avranno la certezza della gloria matematica. Più di mezzo secolo fa, Borel scriveva che «il problema di sapere se le cifre di un numero come $\sqrt{2}$ soddisfano o meno *tutte* le leggi che possono essere enunciate per delle cifre scelte a caso mi sembra sempre uno dei problemi più importanti che i matematici abbiano mai dovuto affrontare». Le sue parole sono ancora attuali.

Appendice alla parte quarta

I primi 10 000 decimali di $\sqrt{2}$

I decimali sono stati calcolati con il software di calcolo formale MacMuPAD (versione 1.4.2, disponibile gratuitamente su Internet all'indirizzo http://www.mupad.de), e con questa sequenza di istruzioni, la cui brevità è uguagliata solo dalla rapidità con cui appare il risultato:

```
DIGITS: = 10 000;
float(sqrt(2));
```

Nelle prossime pagine troverete il risultato del calcolo.

I lettori che volessero trovare un numero maggiore di decimali possono visitare il sito Internet del Progetto Gutenberg (http://www.gutenberg.org), una biblioteca elettronica contenente un lavoro (Etext-No. 129, pubblicato nel 1994) di Robert Nemiroff e Jerry Bonnell in cui si trovano i primi cinque milioni di decimali. I due autori, inoltre, pubblicano sul loro sito una lista di dieci milioni di decimali, che però non è stata verificata. Per la cronaca, segnaliamo sul sito del Progetto Gutenberg un testo di Norman De Forest (Etext-No. 3651, pubblicato nel 2003) che riporta il primo milione di decimali della radice quadrata di... 4!

La più completa lista pubblica di decimali di $\sqrt{2}$ attualmente disponibile su Internet sembra essere quella del giapponese Shigeru Kondo, che ha pubblicato una lista di file contenenti ognuno una parte dei decimali, per un totale di 100 milioni (Kondo dà anche i decimali di altre costanti, tra cui il numero π, il numero e, e il numero aureo).

Segnaliamo infine il sito del canadese Simon Plouffe, nonché quello di Xavier Gourdon e Pascal Sebah, dove potrete trovare la lista dei record di cifre decimali per varie costanti matematiche.

$\sqrt{2}$ = 1,414213562373095048801688724209698078569671875
3769480731766797379907324784621070388503875343276415
7273501384623091229702492483605585073721264412149709
9935831413222665927505592755799950501152782060571470
1095599716059702745345968620147285174186408891986095
5232923048430871432145083976260362799525140798968725
3396546331808829640620615258352395054745750287759961
7298355752203375318570113543746034084988471603868999
7069900481503054402779031645424782306849293691862158
0578463111596668713013015618568987237235288509264861
2494977154218334204285686060146824720771435854874155
6570696776537202264854470158588016207584749226572260
0208558446652145839889394437092659180031138824646815
7082630100594858704003186480342194897278290641045072
6368813137398552561173220402450912277002269411275736
2728049573810896750401836986836845072579936472906076
2996941380475654823728997180326802474420629269124859
0521810044598421505911202494413417285314781058036033
7107730918286931471017111168391658172688941975871658
2152128229518488472089694633862891562882765952635140
5422676532396946175112916024087155101351504553812875
6005263146801712740265396947024030051749531886292563
1385188163478001569369176881852378684052287837629389
2143006558695686859645951555016447245098368960368873
2311438941557665104088391429233811320605243362948531
7049915771756228549741438999188021762430965206564211
8273167262575395947172559346372386322614827426222086
7115583959992652117625269891754098815934864008345708
5181472231814204070426509056532333398436457865796796
5192672923998753666172159825788602633636178274959942
1940377775368142621773879919455139723127406689832998
9895386728822856378697749662519966583525776198939322
8453447356947949629521688914854925389047558288345260
9652409654288939453864662574492755638196441031697983

3061852019379384940057156333720548068540575867999670
1213722394758214263065851322174088323829472876173936
4746783743196000159218880734785761725221186749042497
7366929207311096369721608933708661156734585334833295
2546758516447107578486024636008344491148185876555542
8645512331421992631133251797060843655970435285641008
7918500760361009159465670676883605571740076756905096
1367194013249356052401859991050621081635977264313806
0546701029356997104242510578174953105725593498445112
6922780344913506637568747760283162829605532422426957
5345290288387684464291732827708883180870253398523381
2274999081237189254072647536785030482159180188616710
8972869229201197599880703818543332536460211082299279
2930728717807998880991767417741089830608003263118164
2798823117154363869661702999934161614878686018045505
5539869131151860103863753250045581860448040750241195
1843056745336836136745973744239885532851793089603738
9891517319587413442881784212502191695187559344438739
6189314549999906107587049090260883517636224749757858
8583680374579311573398020999866221869499225959132764
2361941059210032802614987456659968887406795616739185
9572888642473463585886864496822386006983352642799056
2831656139139425576490620651860216472630333629750756
9787060660685649816009271870929215313236828135698893
7097416504474590960537472796524477094099241238710614
4705439867436473384774548191008728862221495895295911
8789214917983398108378827815306556231581036064867587
3036014502273208829351341387227684176678436905294286
9849083845574457940959862607424995491680285307739893
8296036213353987532050919989360751390644449576845699
3471276364507163279154701597733548638939423257277540
0382602747856741725809514163071595978498180094435603
7939098559016827215403458158152100493666295344882710
7292396602321638238266612626830502572781169451035379
3715688233659322978231929860646797898640920856095581
4261436363100461559433255047449397593399912541953230
0932175304476533964706627611661753518754646209676345
5873861648801988484974792640450654448969100407942118

16925796857563784881498986416854994916357614484047021033989215342377037233353115645944389703653166721949
04935188290580630740134686264167247011065346349391640714628556798017793381442404526913706660977763878486
62380033923243704741153318725319060191659964553811578884138084332321053376746181217801429609283241136275
25408873729051294073394794330619439569367020794295158782283493219316664111301549594698378977674344435393
37709957134988407890850815892366070088658105470949790465722988880892461282816013133701029080290999745647
84958154561464871551639050241985790613109345878330620026220737247167668545549990499408571080992575992889
32366154382719550057816251330381531465779079268685008069844284791524242754410268057563215653220618857512
25113063937025362927161968251259192025216058701189596732244239267423734490764646727375347964598819149807
93171800242385545388603836831080077918246646275411744425001872777951816438345146346129902076334301796855
43856316677235183893366670422221109391449302879638128398893117313084300421255501854985065294556377660314
61255909104611384768282359592477228629042642736163264585443392877263860343149804896397363329754885925681
14929683612672589857383321643666348702347730261010613050729861153412994880877447311122954265275165366591
17301423606265258690771982170370981046443604772267392829874152593069562063847108274082184906737233058743
02970924289948173924407869375284401044399048520878851914193541512900681735170306938697059004742515765524
80784473621441050162008454441222559562029847259403528019067980680983003964539856859304586252606377974535
59927747299064888745451242496076378010863900191058092874764720751109238605950195432281602088796215162338
52161287522851802529287618325703717285740676394490982546442218465430880661058020158472840671263025459379
89065081685713716566859413005331970365964033766741461049563765103083661348931094780268129355733189055197
05201845150399690986631525124116111925940552808564989319589834562331983683494880806171562439112866312797

8483719789533690152776005498055166350197855571101405
5529763384127504468604647663183266116518206750120476
6991098721910444744032689436415959427921994423553718
7042995592403140917128481585438660053857135836398163
0945240755700932516824344168240836197927337282521546
2246961533217026829950979089034594858878349439616204
3584224973971871139589273050921970549171769616004455
8089942787888036916943289459514722672292612485069617
3163809410821860045286102696547576304310256027152313
9694821355198214097165490973199928349256740974903922
9712634869341457493319804171807611196390227866407592
2434167762466236238913110270343304576368141128321326
3085822394562195980866129399962012341561763181743124
2008901498384856048087986460839359649236651429681257
7314322914568716827621996118278269531574983802624651
7590541039761812876042163861345022132627277566124411
3361077519555774950865636067378665062318564069912280
1875741785494661253275997697960597760590756489106661
0158384172028185304321190446577525542775437987260548
8173619826758168628329526078993222668360283851351228
1059318591028641508157056319717315183136250243590414
6321223921766339826893682531505300598915470290953719
3266207341123494743367884690201390497842852163414429
2145895582878476693946464267812219049785636355263368
2780518600986992489377860023987691698076566219438985
4437080594643336233381058745816235475600136592435242
6571430834655457680023708146757325254702550747637471
6350678515991736937932510326827606286459146182047214
8637037077192692682362333472037924596469181052613915
3086280291440965482563873092730426544662929045896063
7519187114693453619733247895727070315309309019211991
9999361576500350398405406742538792752792272473356677
0607837911384488936261367657060263600315132952095395
2028548973844862561349244147086070866026763499787934
2087583612194711699422384848259591430452810706260150
8969135303017720062717054402090669514915274597719705
9476954740952102878725578568800221937177435581107939
3088338455864827729100862955456614130672123084874022

7121058686323388237413884428938155444647105755651468
4357029466350628938735698686883764803265195284146535
1739530273612013742030098673983851432190043602898269
8293529399414129230580384565022707216815161941011449
8263013649008770483984883860906533685990545838952031
8564804149327214239086516499943165920796595356943072
3112911629286797517156688905439322035691293324570208
0671944404973049439814082278296027994245410831666759
2142483518272381720504103927428880155622338079614751
2433514731021284545944899444996000752437519570116683
4174474907958820995178367680232365176749723014874577
4272599476096219843271483529861119027287358490521797
5908374197486026706053746231530039375212367867752848
6921958571375542696848278363178611099336801439159059
7484285805451613023014397905701610889862777961075067
3332676048654929251399781390535882276893732204941483
9401355603565604421401761206051318068919899626061848
3185340183623782172663758045524719626617492542285280
4571442048578342113228008528704205488992341278554812
3676153770710425446986852199112283542663499971274836
6076246241820736466617128394748473280474430403344107
2004287271275670279567582429262719454580530026664899
6507956977817862194217200523716536946770419511191270
4624836051130289046437751148694887849615118841471910
0012558838366606772084112351535588112677895715585904
1257626160106751315358021242733187100063582495450409
9579407254798900316826512373119055668291519430537084
8930786919742829049038603723116099283424317122250994
5471501928666487871079519951800546338838443154817246
3548024451803084527343100062137103462573306001234973
7443558180965678464641533905146569193245623531405779
1936989884236471835253758052577133112007971040683154
9266540202604680681839143782721476906324246951712863
6738443139833371176159418699934662623453734523567940
1241680922911636095637216745283917099091466485073920
5151605604737871061547021699607465693097944261214692
5615934256494019122989514732544715181263258368897282
2628332952403597007278633646045947071241747294687757

0595815734996284809956783925547424044899188707106967
5242507745201229360810574142653234724064162141033353
3405511045212617503590284037454591864504727624342071
7709297935401021409646450283683418040758608100140721
6192477179809859681115404464437285689592868319777977
8693464159846974513391774153790487788083002205833504
6746555323028587325835...

Parte quinta

Al di là dei decimali

«Una carta non è il territorio».

Alfred Korzybsky, *Science and Sanity.*

Data la nostra incapacità di descrivere qualitativamente la struttura dei decimali della radice quadrata di 2, una delle soluzioni per andare avanti consiste nel cambiare prospettiva, abbandonando la forma decimale a favore di altri modi di rappresentare i numeri, più adatti a capire il caso di $\sqrt{2}$.

Partendo da un punto di vista geometrico del tutto elementare, il capitolo 17 presenta le «frazioni continue», uno strumento fondamentale della teoria dei numeri, in grado, tra l'altro, di fornire bellissime dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$.

Il capitolo 18 si interessa all'approssimazione della radice quadrata di 2 attraverso le frazioni, a partire da un metodo legato alle frazioni continue che si è imposto nel XIX secolo con i problemi legati agli orologi.

Nella gran parte dei casi, nelle questioni di approssimazione o di rappresentazione dei numeri a partire dalle frazioni, si pone l'accento sui denominatori (è il caso, in particolar modo, delle frazioni continue). Nel capitolo 19 si adotta il punto di vista opposto, e si va alla scoperta del «mondo dei numeratori», meno noto ma ricco di proprietà interessanti che danno alla radice di 2, una volta di più, l'occasione di distinguersi.

Il capitolo 20, infine, affronta il tema delle «rappresentazioni sturmiane», un modo ulteriore di rappresentare i numeri, legato, in questo caso, alla «dinamica simbolica», e che consente ancora una volta di sottolineare il carattere speciale della radice quadrata di 2.

17.

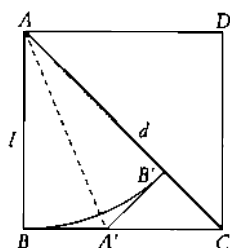
Frazioni senza fine

Nel 1886, il matematico scozzese George Chrystal pubblica un manuale di algebra generale destinato agli studenti di matematica. Ristampato più volte nel corso del XX secolo, il libro contiene una dimostrazione dell'irrazionalità della radice di 2 dal destino assolutamente straordinario. Sembra che sia stata rlscoperta più volte, in particolare da Hans Rademacher e Otto Töplitz nel 1930 (non sappiamo se Chrystal ne sia o meno il primo autore). Si tratta dell'unica dimostrazione in grado di poter competere per celebrità con la dimostrazione classica che abbiamo visto nel capitolo 5, per due ragioni essenziali: da un lato, ha rappresentato la base di un insìeme di ricostruzioni della matematica degli antichi Greci; dall'altro, fornisce un modo pratico di visualizzare l'importante concetto di «frazioni continue».

Il fatto che questa dimostrazione, che stiamo per analizzare in dettaglio, sia ricca di ramificazioni così diverse e profonde è un elemento a favore dell'opinione che non sempre il progresso, in matematica, nasce da teorie complicate o da problematiche di un imperscrutabile tecnicismo: a volte, basta qualche idea molto semplice.

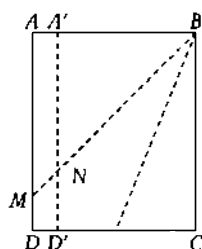
Giocare con le pieghe

Prendiamo un foglio di carta quadrato, $ABCD$, e siano $l = AB$ e $d = AC$, rispettivamente, il suo lato e la sua diagonale: se la radice quadrata di 2 è un numero razionale, allora l e d possono essere scelti come interi. Pieghiamo il foglio, portando il lato [AB] sulla dia-

gonale $[AC]$; indichiamo con B' il punto della diagonale su cui finisce l'angolo del foglio, e A' il punto di $[BC]$ in cui si forma la piega.

Dato che l e d sono interi, la lunghezza $B'C$, uguale a $d - l$, è anch'essa intera. Osserviamo che il triangolo $A'B'C$ è rettangolo in B'. Infatti il suo angolo in B' è il supplementare dell'angolo $\angle AB'A'$, che è a sua volta retto poiché corrisponde, attraverso la piegatura, all'angolo in B del quadrato di partenza. Il triangolo $A'B'C$ è anche isoscele in B', essendo uguali i suoi angoli in C e A' (sono entrambi la metà di un angolo retto: la cosa è ovvia per l'angolo in C, mentre per l'angolo in A' deriva dal fatto che la somma degli angoli di un triangolo è equivalente a due angoli retti e che l'angolo in B' è retto). Perciò si ha che $B'C = B'A'$. Dato che il punto B' è stato ottenuto ripiegando AB su AC, anche le lunghezze $A'B$ e $A'B'$ sono uguali. Si ha quindi $BA' = A'B' = B'C = d - l$; d'altra parte, si ha $A'C = BC - BA'$, e dunque $A'C = l - (d - l) = 2l - d$. Il particolare che dobbiamo tenere a mente, a proposito di queste uguaglianze, è che i lati del triangolo $A'B'C$ hanno lunghezze intere.

Così, partendo dal triangolo isoscele ABC, rettangolo in B e dotato di lati a lunghezza intera, abbiamo costruito un nuovo triangolo, $A'B'C$, isoscele, rettangolo in B' e con i lati interi. Il fatto importante è che si tratta di un triangolo *più piccolo* di ABC: se si ricomincia con la stessa costruzione a partire da $A'B'C$, otterremo in maniera del tutto analoga un terzo triangolo isoscele e rettangolo a lati interi, più piccolo degli altri due, e così via. Continuando di questo passo, finiremo per giungere a un'incoerenza, poiché è impossibile costruire un'infinità di triangoli sempre più piccoli e i cui lati abbiano sempre lunghezza intera. L'ipotesi che il lato l e la diagonale d possano essere entrambi interi non è sostenibile: que-

sta dimostrazione, che per ragioni che vedremo tra poco è detta «antiferetica», è quella che compare nel libro di Chrystal.

Prima di esplorarne tutte le conseguenze, apriamo una breve parentesi per accennare a una bella costruzione geometrica proposta nel 1999 da Thoki Yenn, molto simile a quella di Chrystal e che consente, partendo da un rettangolo qualunque, di ottenere per piegature successive un rettangolo diagonale (rettangolo in cui il rapporto lunghezza/larghezza è pari a $\sqrt{2}$ – vedi cap. 9).

Sia *ABCD* il rettangolo iniziale. Pieghiamo il lato [*AB*] sul lato [*BC*], e poi torniamo indietro: il segmento che indica la piega è detto [*BM*]. Pieghiamo poi il lato [*BC*] sul segmento [*BM*], portando così il punto *C* in un punto che indicheremo con *N*, e poi rimuoviamo nuovamente la piegatura. La parallela al lato [*AD*] che passa per *N* (costruita anche lei per piegatura) taglia i lati [*AB*] e [*CD*] rispettivamente in *A′* e *D′*, e il rettangolo *A′BCD′* è un rettangolo diagonale (ne lasciamo la dimostrazione al lettore).

Rademacher e Töplitz, autori, nel 1930, di un ragionamento identico a quello fornito da Chrystal, si erano dichiarati stupiti del fatto che gli antichi Greci potessero essersi lasciati sfuggire questa dimostrazione dell'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato, dimostrazione il cui punto di vista geometrico sembra tuttavia così vicino a quello dei matematici come Euclide. Nel 1946, poi, lo storico Kurt von Fritz formula un'ipotesi: i Greci avrebbero realmente utilizzato questo tipo di ragionamento per stabilire l'incommensurabilità di certe grandezze. Ignorando, a quanto pare, l'esistenza dei lavori di Chrystal, Rademacher e Töplitz, von Fritz pubblica un ragionamento antiferetico che dimostra l'incommensurabilità della diagonale e del lato del pentagono regolare (e non del quadrato; una versione matematicamente equivalente del risultato presentato da von Fritz era stata data nel 1889 dallo storico della matematica George Allman, ma in una forma completamente diversa). Von Fritz afferma di non aver fatto nient'al-

tro che ricostruire quella che è stata la primissima dimostrazione di incommensurabilità della storia, adducendo a sostegno della propria idea il fatto che il pentagono stellato era un segno di riconoscimento dei pitagorici, la scuola di pensiero greca del VI e V secolo a. C. cui è stata attribuita la scoperta della nozione di incommensurabilità. La dimostrazione presentata da von Fritz, che non descriveremo ma di cui vedremo una variante al capitolo 24, equivale, in linguaggio moderno, a dimostrare l'irrazionalità del numero aureo, $(1 + \sqrt{5})/2$.

Diversi specialisti di storia della matematica antica hanno sposato l'idea che la primissima dimostrazione di incommensurabilità abbia potuto essere di natura antiferetica, indipendentemente dal fatto che si tratti di quella di Chrystal, Rademacher e Töplitz – una cosa che a nessuno di loro era passata per la testa – o quella di von Fritz. Il filone di ricerca ha portato alla pubblicazione di vari lavori di ricostruzione, come quelli di David Fowler; questi ultimi, pubblicati nel 1987, esplorano tutti gli sviluppi matematici che nascono da ragionamenti analoghi. Altri specialisti, invece, come Wilbur Knorr, sono molto più discreti, e di fronte all'assenza di fonti esplicite tendono a non fidarsi di simili ricostruzioni.

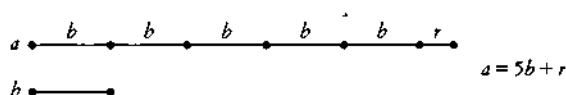
Una fetta ciascuno

Il termine *antiferesi*, di origine greca, deriva dal verbo *anthuphaireô*, utilizzato da Euclide negli *Elementi* (libro VII, proposizione 1). La parola è composta da *huphaireô*, che in questo caso significa «sottrarre un po' per volta», e dal prefisso *anti-*, cui oggi siamo soliti dare un senso di opposizione tra due cose, ma che può anche indicare, in modo più neutro, l'idea di due cose che stanno una di fronte all'altra, che si corrispondono. L'antiferesi, quindi, è una «sottrazione reciproca». Si tratta, originariamente, di un metodo sistematico dato da Euclide per trovare il massimo comun denominatore tra due numeri. Nei suoi sviluppi contemporanei, il metodo ha preso il nome di «algoritmo di Euclide».

L'antiferesi si propone di trovare una «unità di misura comune» tra due segmenti lunghi, rispettivamente, a e b. In altri termini, si cerca un segmento u che sia contenuto un numero intero di volte

in a e un numero intero di volte in b: come abbiamo già visto nel capitolo 2, un segmento simile esiste se, e solo se, il rapporto a/b è un numero razionale (precisiamo che l'espressione a/b non indica sempre un numero razionale, dato che nulla impedisce ad a e b di assumere valori non interi). L'idea di base del metodo è che se esiste un segmento u in grado di misurare contemporaneamente a e b, allora u misura anche un segmento di lunghezza $a - b$ (assumendo che a sia la maggiore delle nostre due lunghezze). Non è difficile convincersi del fatto che tale condizione, sufficiente, è anche necessaria. Pi precisamente: se un segmento u misura sia b che $a - b$, allora misura anche a.

Capita, in matematica, che le idee più semplici siano le più profonde: ciò che abbiamo appena descritto ne è forse uno degli esempi più straordinari. Applicate al caso delle grandezze intere, queste considerazioni danno origine al concetto di «divisione euclidea», uno dei pilastri dell'aritmetica, e, in maniera più generale, a quello di «anello euclideo». Dalla loro applicazione a grandezze a e b non necessariamente intere si giunge alla nozione di «frazione continua», che è l'argomento che ci interessa adesso.

Riprendiamo i nostri segmenti di lunghezza a e b. Se esiste un'unità u che li misura entrambi, allora u misura $a - b$, e dunque anche $a - 2b$, $a - 3b$ ecc. Il primo passo dell'antiferesi consiste nel sottrarre tutte le volte che si può la lunghezza b dalla lunghezza a. Quando non è più possibile, quando, cioè, la lunghezza b è stata sottratta da a un numero q di volte e il resto r (uguale ad $a - qb$) è di lunghezza inferiore a b, allora il primo passo è terminato (la figura seguente rappresenta un caso in cui $q = 5$).

Adesso abbiamo a che fare con dei segmenti di lunghezza b e r, e siamo sempre alla ricerca della nostra unità u. La seconda idea dell'antiferesi, allora, è di scambiare il ruolo dei due segmenti: dato che adesso la più piccola delle due lunghezze in gioco è r, è lei che verrà sottratta da b il maggior numero possibile di volte. Il principio dell'antiferesi sta tutto in queste due idee: sottrarre il più piccolo dal più grande finché si può (cioè finché la lunghezza del resto

non è inferiore a quella del minore dei due segmenti iniziali); dopo di che, terminata l'operazione, si scambiano i ruoli: b assume quello del segmento più grande, e r quello del più piccolo.

Applicando ripetutamente l'antiferesi, possono presentarsi due casi. Il primo è quello in cui si finisce per ottenere un segmento contenuto esattamente un numero intero di volte nel più grande. In tal caso il resto è nullo, l'algoritmo si ferma e il segmento più piccolo ci dà la lunghezza u che stavamo cercando, quella che misura i due segmenti iniziali. Ecco un esempio in cui si ha tale situazione.

$b = 2r + r'$ $\qquad$ $r = 3r'$

Quando a e b sono interi, non è difficile convincersi del fatto che si arriva sempre a un finale del genere, dato che anche il resto è un numero intero che diminuisce a ogni passaggio (finendo quindi necessariamente per annullarsi). In pratica, l'algoritmo di Euclide applicato a due interi è presentato molto spesso come un metodo che permette di trovare il massimo comun denominatore, u, di a e b: da quanto detto finora, quest'ultimo è uguale all'ultimo resto non nullo della sequenza di divisioni euclidee (nell'esempio della figura, è r').

Il secondo caso, che per noi è più interessante, è quello in cui, per quante volte si applichi il procedimento, non si raggiunge mai un punto in cui il segmento più piccolo è contenuto esattamente un numero intero di volte nel più grande. In tal caso, allora, non esiste alcuna unità di misura comune ad a e b, e dunque il rapporto a/b è irrazionale.

Le nostre costruzioni geometriche di poco fa mettono in luce proprio questo secondo caso, con $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$: piegare AB su AB' non è che un modo per sottrarre la lunghezza AB (= 1) alla lunghezza AC (= $\sqrt{2}$) per ottenere la lunghezza $B'C$. Essendo quest'ultima minore di AB, la sottrazione successiva (seconda tappa dell'antiferesi) è tra AB e $B'C$. Dato che $AB = BC$, l'operazione è equivalente a sottrarre $B'C$ da BC; l'analisi geometrica ci dimostra che la lunghezza $B'C$ può essere sottratta da BC due volte: la prima sottrazione equivale a togliere il segmento BA', lasciando così il segmento $A'C$, mentre la seconda lascia un segmento residuo che corrisponde, alla scala del triangolo $A'B'C$, al resto $B'C$ che si ottiene dopo aver sottratto il lato AB alla diagonale AC nel triangolo

ABC. Il processo, dunque, si ripete identico a se stesso a ogni tappa, impedendo al tempo stesso all'antiferesi di terminare, e a $\sqrt{2}$ di essere razionale.

È quantomeno curioso il fatto che Euclide, pur evocando esplicitamente questo metodo come un mezzo possibile per determinare se due grandezze a e b sono commensurabili o meno, non lo utilizzi mai in una dimostrazione di incommensurabilità. Non sappiamo, quindi, se per lui si trattava di un risultato puramente teorico o di un risultato che gli avrebbe consentito, prima o poi, di dimostrare l'incommensurabilità di due lunghezze.

Dall'antiferesi alle frazioni continue

Tra la menzione del metodo precedente da parte di Euclide e la dimostrazione, da parte di Chrystal, dell'irrazionalità della radice di 2, i matematici hanno assistito alla comparsa di un oggetto matematico decisivo per l'argomento in questione: le frazioni continue, analizzate per la prima volta in maniera sistematica all'epoca di Rafael Bombelli, nel XVI secolo. Mentre il nostro sistema di numerazione accorda un'importanza un po' arbitraria alle potenze di dieci, le frazioni continue costituiscono un'alternativa per così dire più «obiettiva» per la rappresentazione dei numeri, indubbiamente meno pratica per i calcoli comuni ma capace di dare accesso a informazioni più fondamentali.

La dimostrazione antiferetica dell'irrazionalità della radice quadrata di 2 permette di ottenere più agevolmente un primo esempio di frazione continua (non sappiamo quando e da chi la cosa sia stata enunciata esplicitamente per la prima volta – né Allmann, né Chrystal, Rademacher, Töplitz e von Fritz ne parlano). A tale scopo, riformuliamo il ragionamento geometrico precedente in termini di uguaglianze algebriche: abbiamo $\sqrt{2} = AC/AB$. Dato che $AC = AB' + B'C$ e che $AB' = AB = BC$, si ha che $\sqrt{2} = (AB' + B'C)/BC = 1 + (B'C/BC)$. Il passo seguente della dimostrazione consiste nell'osservare che $BC = BA' + A'C$ e che $BA' = A'B' = B'C$. Riscriviamo la frazione $B'C/BC$ nella forma $1/(BC/B'C)$: ne segue che $B'C/BC = 1/((B'A + A'C)/B'C) = 1/(1 + A'C/B'C)$, e quindi che $\sqrt{2} = 1 + 1/(1 + (A'C/B'C))$. Infine, sappiamo anche che $A'C/B'C = \sqrt{2}$,

il che, ripetendo il ragionamento, dà per $\sqrt{2}$ l'espressione seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \left(1 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}\right)}\right)}$$

che possiamo anche scrivere come

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \sqrt{2}}}} \qquad [1]$$

Ripetendo più volte il procedimento, otteniamo lo «sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua»:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}} \qquad [2]$$

I puntini di sospensione obliqui indicano che questa frazione «a cascata» continua «all'infinito». In termini più rigorosi, significano che la successione dei numeri

$$1 \qquad 1 + \frac{1}{2} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}} \qquad \text{ecc.}$$

si avvicina sempre più a $\sqrt{2}$ (ritorneremo più avanti su queste frazioni – vedi cap. seguente). È un risultato di cui accetteremo la validità senza cercare di dimostrarlo, sebbene non sia una conseguenza diretta della relazione [1], contrariamente a quanto si ritiene talvolta (si veda l'inserto più avanti). In breve, la chiave che permette di passare dalla relazione [1] alla [2] è che i segmenti in gioco nella costruzione geometrica precedente diventano sempre più piccoli a ogni passaggio, cosicché il valore ottenuto trascurando il resto, $1/(\sqrt{2}+1)$, si avvicina sempre di più al rapporto AC/AB man mano che «si accumulano i livelli».

In teoria, l'antiferesi può essere utilizzata per ottenere lo sviluppo in frazione continua di qualsiasi numero x. Per determinarlo, si conta quante volte un segmento di lunghezza 1 è contenuto in un segmento di lunghezza x; sia n è il numero così ottenuto: allora esiste un numero r, positivo o nullo e strettamente minore di 1, tale che $x = n \cdot 1 + r$. Dopo di che si ricomincia, prendendo 1 al posto di x e r al posto di 1, e si va avanti nello stesso modo, facendo entrare il maggior numero possibile di volte il segmento più piccolo nel più grande, rimpiazzando poi il segmento più grande con il più piccolo e il più piccolo con il resto. I valori n, n' e n'', corrispondenti al numero di volte che un segmento piccolo è contenuto in uno grande sono detti «quozienti parziali» della frazione continua. Nel caso di $\sqrt{2}$, i quozienti parziali sono tutti uguali a 2, salvo il primo (che è uguale a 1).

Da quanto abbiamo detto a proposito dell'antiferesi, lo sviluppo in frazione continua di un numero x può avere due nature distinte. La prima corrisponde al caso in cui l'antiferesi applicata a 1 e a x finisce per arrestarsi: in tal caso si parla di frazione continua «finita», e x è un numero razionale. Tale, ad esempio, è il caso di $x = 48/21$, di cui si può dimostrare che è uguale a $2 + 1/(3 + 1/2)$. La seconda possibilità è quella di un'antiferesi che, come nel caso di $\sqrt{2}$, non finisce mai, e produce una frazione continua «infinita» che corrisponde a un numero irrazionale.

In una frazione continua, il passaggio al limite non è un'operazione immediata, ed è un altro esempio di ciò che abbiamo detto nel capitolo 3 sui rischi che si corrono a ragionare in maniera incauta sull'infini-

to. Il fatto che $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + ... + 1/(2 + 1/(1 + \sqrt{2})))))$ non consente di dedurre direttamente che $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + + 1/2 + ...))$: per arrivare a tale conclusione è necessario passare per una dimostrazione accurata, che non è tra i nostri obiettivi. Soffermiamoci però sui problemi che possono presentarsi, attraverso l'esempio seguente. È facile vedere come il numero $x = 2$ sia una soluzione dell'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$. Quest'ultima può anche essere riscritta come $x = 5 - 6/x$: sostituendo alla x del denominatore nel membro di destra l'espressione $5 - 6/x$ si ottiene che $x = 5 - 6/(5 - 6/x)$, e nulla vieta di andare avanti quanto si vuole. Eppure il limite dell'espressione $5 - 6/(5 - 6/(5 - 6/5))$ ecc. non vale 2, bensì 3; il lettore è libero di dimostrarlo (e di interessarsi, volendo andare oltre, al legame tra l'equazione $x^2 - 5x + 6 = 0$ e i valori 2 e 3).

Il punto di vista dell'algebra

Come abbiamo visto, l'idea di sviluppo in frazione continua è un'estensione praticamente immediata di quella di antiferesi. Eppure, nonostante quest'ultima risalga almeno ai tempi di Euclide – cioè tre secoli prima della nostra era – le prime tracce esplicite delle frazioni continue compaiono solo alla fine del XVI secolo. È Bombelli a fornire per primo un metodo sistematico per lo sviluppo in frazione continua delle radici quadrate, e, più generalmente, dei numeri quadratici (cioè di quei numeri che sono soluzioni di equazioni di secondo grado a coefficienti interi, o, in altre parole, i numeri esprimibili come $(a + \sqrt{b})/c$ dove a, b e c sono numeri interi.

Per sviluppare un numero quadratico in frazione continua, Bombelli non si serve di un metodo geometrico paragonabile a quello deducibile dal ragionamento di Chrystal, bensì di un metodo puramente algebrico. Per $\sqrt{2}$, ad esempio, il metodo assume la forma seguente: si sottrae da $\sqrt{2}$ il più grande intero che vi sia contenuto, nella fattispecie: 1. Sia x la differenza tra $\sqrt{2}$ e 1. Si ha dunque $\sqrt{2} = 1 + x$, dove x è un numero compreso tra 0 e 1. Indichiamo con x' il suo reciproco, ottenendo così $\sqrt{2} = 1 + 1/x'$, da cui deriva $x' = 1/(\sqrt{2} - 1)$: a questo punto si moltiplicano il numeratore e il denominatore di questa frazione per l'«espressione coniugata» del

denominatore, vale a dire il numero che si ottiene sostituendo $\sqrt{2}$ con $-\sqrt{2}$. Otteniamo così $x' = (-\sqrt{2} - 1)/[(-\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} - 1)]$: sviluppando il denominatore e semplificando ove possibile, si trova quindi che $x' = \sqrt{2} + 1$. Siamo così giunti all'uguaglianza $\sqrt{2} = 1 + 1/(\sqrt{2} + 1)$. A questo punto si passa all'esame del denominatore $\sqrt{2} + 1$, ricominciando con la stessa procedura seguita poco fa: il più grande intero minore di $\sqrt{2} + 1$ è 2, e quindi scriviamo $\sqrt{2} + 1 = 2 + y = 2 + 1/y'$ dove y' è il reciproco di y. Se ne deduce che $y' = 1/(\sqrt{2} - 1)$, cioè lo stesso valore di x': di qui, il processo si ripete in maniera identica, e il risultato che otteniamo, un'iterazione dopo l'altra, è il seguente: $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + \ldots)))$.

Nella sua *Algebra*, pubblicata nel 1572, anche Bombelli illustra il metodo attraverso un esempio specifico, la radice quadrata di 13. Non sappiamo dove sia apparso per la prima volta lo sviluppo in frazione continua di $\sqrt{2}$. Lo si trova nell'*Introduzione all'analisi infinitesimale* di Eulero, del 1748 (non l'abbiamo trovato nell'opera di John Wallis, un altro degli artefici della teoria delle frazioni continue). Se si scoprisse che il primo sviluppo della radice di 2 in frazione continua non è mai stato pubblicato prima di tale data (ed è una cosa di cui non possiamo essere sicuri), la comparsa così tardiva, sulla scena matematica, di un caso pur così semplice e significativo non farebbe che ribadire ciò che abbiamo osservato nel capitolo 2, a proposito del carattere tardivo del testo più antico in nostro possesso in cui si dimostri esplicitamente l'irrazionalità di $\sqrt{2}$. A volte l'esempio più semplice ha bisogno di tempo per ricevere la giusta attenzione, proprio per il fatto di essere considerato troppo facile o perché la sua semplicità maschera, in parte, le idee che vuole illustrare. In particolare, la scelta di Bombelli di sviluppare in frazione continua $\sqrt{13}$ anziché $\sqrt{2}$ è sensata, perché $\sqrt{2}$ presenta la caratteristica un po' troppo peculiare di avere tutti i quozienti parziali identici (a eccezione del primo).

Pregi e difetti dell'antiferesi e delle frazioni continue

Rispetto alla serie di uguaglianze aritmetiche astratte esibite dalla dimostrazione classica dell'irrazionalità della radice quadrata di 2

(vedi cap. 5) il ragionamento antiferetico ha dalla sua due atout principali che sono da un lato la chiarezza e dall'altro l'estetica. Numerose varianti di questa idea fondamentale consentono di dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e di molti altri numeri. Sfortunatamente, ci sono ragioni teoriche che fanno sì che la fonte si inaridisca, tutto sommato, abbastanza in fretta: al di fuori del quadrato, del pentagono regolare e del triangolo equilatero, legati rispettivamente a $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$, diventa ben presto difficile trovare figure che non siano variazioni più o meno sofisticate delle precedenti e alle quali si possa applicare l'antiferesi. Il punto di vista algebrico di Bombelli si dimostra ben presto insostituibile: se bastano pochi passaggi di un calcolo sistematico per sviluppare in frazione continua un numero come $\sqrt{19}$, non esistono figure ragionevolmente semplici in cui si ritrovi un rapporto di lunghezze pari a $\sqrt{19}$ da cui stabilire un risultato di incommensurabilità. E anche l'idea di sostituire $\sqrt{19}$ con un numero derivato come $2\sqrt{19} - 3$ (la cui irrazionalità comporta automaticamente quella di $\sqrt{19}$) non funziona; Jean-Pierre Kahane ha addirittura dimostrato, a livello più generale, che è, per così dire, umanamente impossibile stabilire l'irrazionalità di $\sqrt{19}$ attraverso un metodo analogo a quello utilizzato da Chrystal per $\sqrt{2}$.

Per quanto bella, dunque, l'antiferesi geometrica deve cedere rapidamente il passo all'algebra e alle frazioni continue, che danno di ogni numero una rappresentazione indipendente da qualsiasi base: dato un numero x, i suoi quozienti parziali ne rappresentano, in un certo senso, lo spettro, ed è lecito pensare che le frazioni continue siano il sistema di rappresentazione dei numeri più oggettivo (a parte qualche piccolo particolare su cui torneremo nel capitolo 24).

La superiorità matematica delle frazioni continue sul sistema decimale è particolarmente sorprendente quando si tratta di rappresentare un numero come la radice quadrata di 2. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, mentre ignoriamo tutto o quasi della struttura dei decimali di $\sqrt{2}$, la sequenza dei suoi quozienti parziali, invece, è estremamente semplice: un 1 seguito da un'infinità di 2. È una proprietà di tutti i numeri quadratici. Secondo un teorema dimostrato da Louis Lagrange nel 1770, l'insieme dei numeri quadratici coincide esattamente con quello dei numeri il cui

sviluppo in frazione continua è periodico: quelli, cioè, i cui quozienti parziali a un certo punto entrano in un circolo chiuso e non ne escono più. Ecco qualche esempio che illustra il teorema in questione (NB: per non occupare troppo spazio, indicheremo la frazione continua $a + 1/(b + 1/(c + 1/(d + ...))))$ con $[a, b, c, d, ...]$:

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2...]$$
$$\sqrt{6} = [2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 2, 4...]$$
$$\sqrt{7} = [2, 1, 1, 1, 4, 1, 1, 1, 4...]$$
$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{53}}{4} = [2, 3, 8, 58, 8, 3, 3, 3, 8, 58, 8, 3, 3, 3...]$$

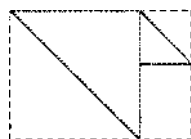
(Segnaliamo ai lettori desiderosi di trovare altri esempi un sito Internet di Ron Knott, sul quale troverete una «calcolatrice» per sviluppare in frazione continua qualunque numero quadratico.)

La teoria delle frazioni continue, dunque, realizza più della rappresentazione decimale l'obiettivo di una rappresentazione dei numeri che ne renda visibili le proprietà matematiche. Un criterio semplice per distinguere i numeri razionali esiste sia per le frazioni continue (frazioni continue finite) che per la rappresentazione decimale (sviluppo decimale periodico); attualmente, però, solo le frazioni continue permettono di definire un criterio semplice per distinguere i numeri quadratici dagli altri.

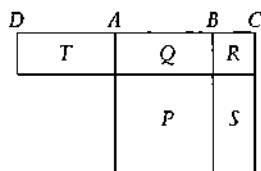
Purtroppo il trionfo delle frazioni continue finisce qui. Anche se il teorema di Lagrange descrive molto bene i quozienti parziali dei numeri quadratici, non ne conosciamo ancora generalizzazione capace di descrivere i quozienti parziali di un numero come $\sqrt[3]{2}$, di cui ancora oggi sappiamo veramente molto poco. Vi è poi un fatto ancora più grave: mentre, come abbiamo visto, è facile sviluppare in frazione continua $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, della frazione continua corrispondente a $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ ignoriamo praticamente tutto. Più generalmente, ancora oggi, partendo dallo sviluppo di x e y in frazione continua, non siamo in grado di fare la benché minima previsione sullo sviluppo della somma $x + y$ o del prodotto xy. Anche la moltiplicazione per un numero intero non ha nulla di semplice: partendo da $\sqrt{2} = [1,2,2,2,...]$, è facile ottenere che $1/\sqrt{2} = [0,1,2,2,2,...]$ e che $2\sqrt{2} = [2,1,4,1,4,1,4,...]$, ma provate a indovinare cosa darà $3\sqrt{2}$! Qui il sistema decimale, con i suoi cari vecchi riporti, si prende una rivincita. Al di fuori dei numeri quadratici e di pochi altri, deriva-

ti dal numero *e* (la base dei logaritmi neperiani - vedi capp. 12 e 13), le nostre conoscenze sullo sviluppo in frazione continua dei numeri più comuni sono praticamente inesistenti.

Varianti geometriche

Terminiamo questo capitolo con qualche metodo alternativo per dimostrare per via geometrica l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ servendosi dell'antiferesi. La prima dimostrazione parte da un rettangolo diagonale (vedi capp. 9 e 11). Pieghiamolo due volte di seguito: cominciamo proiettando la larghezza sulla lunghezza (l'angolo in basso a sinistra viene portato sul lato superiore), e formando così un rettangolo sottile. Di quest'ultimo, proiettiamo poi la larghezza sulla lunghezza (l'angolo in alto a destra viene portato sul lato sinistro) (si vedano anche i «rettangoli restanti» del cap. 11).

Supponendo che le dimensioni del rettangolo iniziale siano uguali, rispettivamente, a 1 e $\sqrt{2}$, il rettangolo sottile ha lunghezza 1 e larghezza $\sqrt{2} - 1$. Il rettangolo bianco visibile in basso a destra dopo la seconda piegatura, infine, ha una larghezza pari a $\sqrt{2} - 1$ e una lunghezza di $1 - (\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$. Il rapporto lunghezza/larghezza di questo ultimo rettangolo, quindi, vale $(2 - \sqrt{2})/(\sqrt{2} - 1)$; moltiplicando il numeratore e il denominatore per $\sqrt{2} + 1$, tale rapporto diventa $(2 - \sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) = 2\sqrt{2} + 2 - 2 - \sqrt{2} = \sqrt{2}$. Dunque si può proiettare una sola volta la larghezza sulla lunghezza nel rettangolo grigio e andare avanti così con l'antiferesi, ottenendo al tempo stesso, come nella prima dimostrazione di questo capitolo, l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ e il suo sviluppo in frazione continua. Questa interpretazione «rettangolare» dell'antiferesi è stata proposta per la prima volta da Nikolai Vorobev nel 1951, ed è stata riscoperta nel 1983 da Clark Kimberling. Anche la dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ data da Steinhaus (vedi cap. 11) permette di ottenere

– e in maniera più diretta – lo sviluppo di $\sqrt{2}$ (o, per la precisione, di $\sqrt{2}+1$): a ogni passaggio della costruzione di Steinhaus si tolgono due quadrati, e se ne deduce che lo sviluppo in frazione continua di $1+\sqrt{2}$ ha come quozienti parziali solo dei 2.

Nel capitolo 6 abbiamo visto una dimostrazione dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ basata sul problema dei due quadrati di sassolini a partire dai quali ci si proponeva di costruire un solo quadrato, più grande. Un altro modo di immaginare la costruzione di un quadrato grande a partire da due quadrati più piccoli e uguali tra di loro è stato concepito da David Fowler. Si considerino due quadrati P e P' identici e di lato uguale a 1, e se ne divida il secondo in tre parti, Q, R e S, in modo tale che disponendole opportunamente intorno al quadrato P si ottenga un quadrato più grande, la cui area è, per costruzione, doppia di quella di P. Per finire, si completa la figura con l'aggiunta di un rettangolo T identico a Q e disposto proprio al suo fianco.

Per costruzione, si ha $AC=\sqrt{2}$ e $DC=1+\sqrt{2}$: dato che dimostrare l'irrazionalità di $\sqrt{2}$ equivale a dimostrare quella di $1+\sqrt{2}$, possiamo concentrare i nostri sforzi sulla lunghezza DC.

L'inizio dell'antiferesi applicata ai segmenti DC e AB è il seguente: $DC/AB = 2 + BC/AB = 2 + 1/(AB/BC)$.

Per valutare il rapporto AB/BC, allora, l'idea consiste nell'osservare che il rettangolo $T+Q+R$ ha la stessa area del quadrato P' (basta sostituire T con S), e quindi la stessa area di P, che a sua volta vale $AB \times AB$. Dato che l'area del rettangolo $T+Q+R$ può essere scritta come $DC \times BC$, si ha $DC \times BC = AB \times AB$, da cui si deduce che $AB/BC = DC/AB$. Si ottiene quindi:

$$\frac{DC}{AB} = \frac{2+1}{\left(\frac{AB}{BC}\right)} = \frac{2+1}{\left(\frac{DC}{AB}\right)}\ .$$

A questo punto, nel membro di destra, basta sostituire DC/AB con $2 + 1/(DC/AB)$, per poi ricominciare all'infinito, e ottenere infine lo sviluppo di frazione continua di DC/AB:

$$\frac{DC}{AB} = 1 + \sqrt{2} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

18.

A un passo da $\sqrt{2}$

Ingranaggi e frazioni

Siamo nel XIX secolo. Achille Brocot, un orologiaio francese, sta riflettendo: disponendo di un meccanismo che fornisce un movimento rotatorio con una velocità, diciamo, di un giro al minuto, non ha problemi a ottenere, ad esempio, tre giri e mezzo al minuto senza dover cambiare tutto quanto. Basta agganciare al suo meccanismo rotante una ruota a 70 denti, il «pignone», e affiancarla con una ruota a 20 denti, la «moltiplica». A ogni giro del pignone, la moltiplica avanza di 70 denti, cioè effettua $70/20 = 3$ giri e mezzo. È il principio dell'ingranaggio, che consente, una volta fissata la frequenza unitaria (il numero di giri al minuto effettuati dal meccanismo iniziale), di ottenere una qualsiasi altra frequenza del tipo p/q, cioè una qualsiasi frequenza razionale.

Dato che è possibile approssimare qualsiasi numero con un numero razionale, la tecnica dell'ingranaggio consente di ottenere una velocità di rotazione arbitrariamente vicina a qualunque valore si desideri. In teoria, almeno. In pratica, le cose si complicano rapidamente: si pensi al caso degli orologi astronomici (che forniscono la posizione dei pianeti nella volta celeste), che richiedono velocità di rotazione fissate da dati astronomici tutt'altro che semplici. Dato che non è ragionevole pensare di moltiplicare il numero di denti in un ingranaggio, bisogna capire come fare, dato un numero x, per trovare una frazione p/q che si avvicini a x e al tempo stesso non faccia entrare in gioco dei numeri p e q troppo grandi. Servirsi, a tale scopo, delle approssimazioni decimali di x sareb-

be indubbiamente molto semplice, ma spesso poco efficace: per stimare $\sqrt{2}$ al centesimo, l'approssimazione decimale ci porterebbe a utilizzare la frazione 141/100 (cioè 1,41), vale a dire delle ruote dotate, rispettivamente, di 141 e 100 denti. Ora, un semplice calcolo dimostra che una coppia di ruote con 41 e 29 denti non solo è meno ingombrante, ma fornisce anche una migliore approssimazione di $\sqrt{2}$ (41/29 = 1,4137..., precisa al millesimo).

Il problema, quindi, è quello di sapere come trovare una o più di queste frazioni così efficaci nell'approssimare un dato numero x. Si parla, in tal caso, di «migliori approssimazioni razionali», indicando con tale definizione quelle frazioni di tipo p/q la cui differenza rispetto a x è minore di quella ottenibile da qualsiasi altra frazione con un numeratore e un denominatore minori di p e q. Si noti come, nel caso pratico dell'orologeria, il fatto che x sia razionale o meno è assolutamente irrilevante, perché se p e q sono numeri troppo grandi, anche un numero del tipo p/q ci guadagna a essere sostituito da una frazione più semplice, per quanto inesatta.

La dicotomia dell'orologiaio

Nel 1860, Brocot scopre il suo «nuovo metodo» di «calcolo degli ingranaggi per approssimazione», che pubblica sulla «Revue Chronométrique». Due anni prima, il matematico Moritz Stern aveva annunciato la scoperta di un risultato simile, passato ai posteri con il nome di «metodo di Stern-Brocot». Nel 1877, Georges-Henri Halphen, all'oscuro del lavoro di Stern, pubblica anche lui un lavoro sull'argomento, dimostrando la proposizione che Brocot, secondo lui, ha «intravisto» ma non ha «enunciato né dimostrato». Quest'ultima, d'altronde, non fa che riprendere e unificare le considerazioni fatte da diversi autori, dal mineralogista John Farey, che nel 1816 pubblica sull'argomento un'osservazione che Augustin Cauchy dimostrerà quello stesso anno, a Pappo di Alessandria nel IV secolo, passando per Nicolas Chuquet, nel XV secolo, e la sua «regola dei numeri medi» (c'è chi ha addirittura interpretato un passaggio del *Parmenide* di Platone come un'allusione a questo genere di considerazioni, ma si tratta di un'interpretazione delle parole del filosofo quantomeno «iperbolica»).

Tutto si basa sull'osservazione seguente: se p/q e r/s sono due frazioni tali che $p/q < r/s$, allora $p/q < (p + r)/(q + s) < r/s$. Date due approssimazioni razionali di un numero, una troppo piccola e l'altra troppo grande, questa proprietà (che il lettore potrà dimostrare come esercizio) consente di costruirne una terza, detta «mediante», intermedia tra le due: si tratta di una «dicotomia», che differisce da quella descritta nel capitolo 14 solo perché non divide in parti uguali l'intervallo compreso tra i valori p/q e r/s. Una proprietà notevole di questa dicotomia, che non dimostreremo, è che se si parte da frazioni p/q e r/s irriducibili, anche la frazione $(p + r)/(q + s)$ è irriducibile.

Per illustrare il metodo di Stern-Brocot, prendiamo come esempio la radice quadrata di 2. Partiamo dalla relazione $1/1 < \sqrt{2} < 2/1$. Il metodo porta alla frazione $(1 + 2)/(1 + 1) = 3/2$, maggiore di $\sqrt{2}$: si ha dunque $1/1 < \sqrt{2} < 3/2$. Ripetendo più volte il procedimento, si ottiene:

$(1 + 3)/(1 + 2) = 4/3$, minore di $\sqrt{2}$, e quindi $4/3 < \sqrt{2} < 3/2$;
$(4 + 3)/(3 + 2) = 7/5$, minore di $\sqrt{2}$, e quindi $7/5 < \sqrt{2} < 3/2$;
$(7 + 3)/(5 + 2) = 10/7$, maggiore di $\sqrt{2}$, e quindi $7/5 < \sqrt{2} < 10/7$;
$(7 + 10)/(5 + 7) = 17/12$, maggiore di $\sqrt{2}$, e quindi $7/5 < \sqrt{2} < 17/12$;
$(7 + 17)/(5 + 12) = 24/17$, minore di $\sqrt{2}$, e quindi $24/17 < \sqrt{2} < 17/12$;
$(24 + 17)/(17 + 12) = 41/29$, minore di $\sqrt{2}$, e quindi
$41/29 < \sqrt{2} < 17/12$;
$(41 + 17)/(29 + 12) = 58/41$, maggiore di $\sqrt{2}$, e quindi
$41/29 < \sqrt{2} < 58/41$;
$(58 + 41)/(41 + 29) = 99/70$, maggiore di $\sqrt{2}$, e quindi
$41/29 < \sqrt{2} < 99/70$;
eccetera.

Le frazioni 3/2, 4/3, 7/5, 10/7, 17/12, 24/17, 41/29, 58/41, 99/70 ecc., ottenute nelle varie iterazioni della procedura, sono dette «approssimanti di Farey» di $\sqrt{2}$. Notiamo, *en passant*, una cosa che avrebbe potuto consolare almeno in parte Goodwin, l'ispiratore del *Pi Bill* di cui abbiamo parlato nel capitolo 5: il valore che aveva proposto per la radice di 2 (10/7) era sbagliato, certo, ma vi era comunque collegato, trattandosi di uno dei suoi approssimanti di Farey... Tornando a cose più serie, ritroviamo il valore 7/5 in un brano di Platone (*Repubblica*, VIII, 546 b-d), dove si parla, in ter-

mini particolarmente ellittici, della «diagonale razionale di 5», l'intero che più si avvicina alla lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 5 (tale intero è 7, da cui l'approssimazione $\sqrt{2} = 7/5$). Sembra, infine, che i valori 7/5 e 10/7 siano quelli utilizzati dagli Egizi (vedi cap. 1).

Ci sono varie cose che meritano di essere osservate a proposito del metodo appena descritto. Anzitutto, è vero che il procedimento non divide l'intervallo in due parti uguali, facendoci correre *a priori* il rischio di ridurlo di meno della metà e dunque di essere meno efficienti che nella dicotomia ordinaria: le approssimazioni razionali che si ottengono, però, sono effettivamente le più precise. Si tratta di una proprietà generale, dovuta in sostanza al fatto che i decimali non sono altro che frazioni il cui denominatore è una potenza di dieci; ci sono dunque «meno decimali che frazioni», ed è logico che con le frazioni si possa approssimare un numero con maggior precisione che con i soli decimali.

In secondo luogo, si può verificare (si tratta di un teorema generale di cui accetteremo la validità) che il metodo porta sempre alle migliori approssimazioni razionali: di tutte le frazioni con denominatore minore di 29, la più vicina a $\sqrt{2}$ è 24/17; poi tocca a 41/29, che viene superata solo da 99/70, e così via.

Un'ultima osservazione, più pertinente al nostro esempio, è che, almeno nelle iterazioni iniziali, il procedimento dà prima due valori minori di $\sqrt{2}$, poi due valori più grandi, poi di nuovo due valori più piccoli, e così via. La cosa va avanti all'infinito (più avanti spiegheremo perché). E così, una tecnica di calcolo inizialmente concepita per risolvere un problema puramente pratico porta a un risultato teorico notevole sulla radice quadrata di 2: sapendo che nel metodo di Stern-Brocot bisogna scegliere due volte al di sotto, poi due volte al di sopra, e così via, bastano pochi calcoli per passare da una tappa alla successiva. Ricordiamo invece che, come si è visto nel capitolo 16, non sappiamo nulla di un'eventuale regola equivalente che semplificherebbe l'applicazione della dicotomia ordinaria alla radice di 2 (con questo si intende che la ripartizione degli 1 e degli 0 nell'espressione binaria di $\sqrt{2}$ è sconosciuta; ne riparleremo nel capitolo 21).

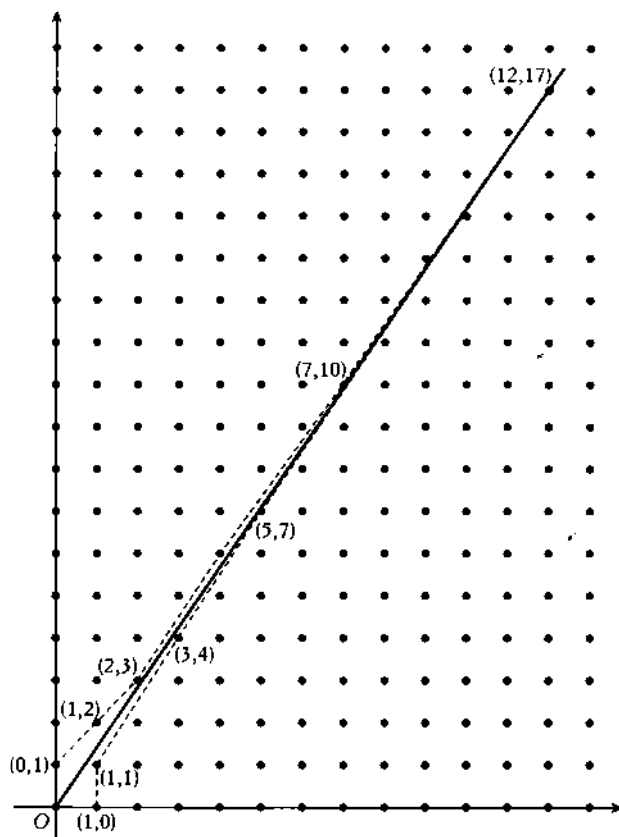
Il ritorno delle frazioni continue

Già nel XVII secolo, ben prima di Brocot, il fisico e astronomo olandese Christiaan Huygens si era posto il problema dell'uso delle frazioni per approssimare i rapporti tra i diversi periodi astronomici (il rapporto tra l'anno e il giorno terrestre, il rapporto tra i periodi di rivoluzione dei vari pianeti intorno al Sole, quello tra il mese lunare e il giorno terrestre...). La risposta che aveva trovato utilizzava le frazioni continue. Come abbiamo visto nel capitolo precedente, lo sviluppo in frazione continua di un numero x porta a una successione di frazioni sempre più vicine a x. Tali frazioni vengono dette «ridotte». Per la radice quadrata di 2, ricordiamo che si tratta delle frazioni:

$$1 \qquad 1+\frac{1}{2} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}} \qquad \text{ecc.}$$

Le regole classiche per operare sulle frazioni consentono di passare dalle espressioni precedenti alle forme seguenti, più «compatte»:

$$1 \qquad \frac{3}{2} \qquad \frac{7}{5} \qquad \frac{17}{12} \qquad \frac{41}{29} \qquad \frac{99}{70} \qquad \text{ecc.}$$

Tutte queste frazioni compaiono applicando il metodo di Stern-Brocot. Per la precisione, le ridotte rappresentano un approssimante di Farey su due di $\sqrt{2}$ (applicando il metodo, tra l'altro, si vede che le ridotte approssimano $\sqrt{2}$ alternativamente per difetto e per eccesso, come si può vedere dalla «tavola chiodata» della figura seguente). Gli altri approssimanti sono 2/1, 4/3, 10/7, 24/17,

58/41...: per quanto riguarda la ricerca delle migliori approssimazioni razionali, dunque, il metodo di Stern-Brocot si mostra superiore alle frazioni continue, nel senso che queste ultime ne «dimenticano» qualcuna per strada, mentre il primo le fornisce tutte (per non parlare di altri metodi di approssimazione di $\sqrt{2}$ come quello di Erone, che procede ancora più velocemente e che quindi ne dimentica ancora di più – ne riparleremo nel prossimo capitolo). I calcoli dimostrano che gli approssimanti «dimenticati» dalle frazioni continue possono anche essere espressi così:

$$1+\frac{1}{1} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}} \qquad 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1}}}}} \qquad \text{ecc.}$$

In un commento alle opere di Stevino pubblicato nel 1624, Albert Girard accenna già a quest'idea di arrivare «estremamente vicini ai radicali, mediante alcuni numeri più atti e idonei di altri allo scopo, a tal punto che se si provasse [ad avvicinarvisi] con altri numeri si finirebbe inevitabilmente per aumentare di molto il numero [delle loro cifre]». Tra gli esempi riportati vi è il caso della radice quadrata di 2, che Girard approssima servendosi di numeri razionali: «[un'approssimazione] è 577/408, o, se volete avvicinarvi ancora di più, 1393/985; e così via all'infinito, dato che si possono prendere numeri grandi a piacere». Girard, tuttavia, non specifica il metodo che lo conduce ai valori 577/408 e 1393/985, che corrispondono a due ridotte consecutive dello sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua.

Il nesso tra gli approssimanti di Farey e le frazioni continue consente di reinterpretare l'algoritmo dell'antiferesi (vedi cap. precedente) e di trasformarlo in un algoritmo di Stern-Brocot per raccogliere

La «tavola chiodata». Il piano (la tavola) è dotato di un sistema di riferimento cartesiano e di una griglia infinita, formata da tutti i punti le cui coordinate sono numeri interi (i «chiodi»). Si fissa l'estremità di un filo elastico nell'origine O, allontanando la seconda «all'infinito» in modo tale che la semiretta così creata abbia una pendenza pari a x, dove x è un numero irrazionale (in parole povere: muovendosi sulla semiretta, a un aumento di 1 dell'ascissa corrisponde un aumento di x dell'ordinata – sul disegno si ha $x = \sqrt{2}$). L'irrazionalità di x fa sì che l'elastico non passi mai per alcun chiodo. Ora spostiamo leggermente la prima estremità dell'elastico fino a farla coincidere con il punto di coordinate (1,0): l'elastico prende la forma di una linea spezzata, e i segmenti che ne fanno parte sono limitati dai chiodi (linea puntinata). Lo stesso capita se l'estremità dell'elastico è portata a coincidere con il punto di coordinate (0,1). Sul disegno si possono leggere molte delle proprietà dello sviluppo di x in frazione continua. Tra le altre: per i punti alle estremità dei segmenti che compongono le linee spezzate, il rapporto tra l'ordinata e l'ascissa è una ridotta di x (per $x = \sqrt{2}$, si ha 1/1, poi 3/2, 7/5, 17/12 ecc.); i chiodi appartenenti alla spezzata ma che non si trovano all'estremità di uno dei segmenti corrispondono agli approssimanti di Farey (sempre per $\sqrt{2}$: 2/1, 4/3, 10/7 ecc.). L'idea della tavola chiodata è stata proposta in maniera indipendente da diversi autori: Henry Smith nel 1876, Henri Poincaré verso il 1880 e Felix Klein nel 1908.

tutte le migliori approssimazioni razionali di un numero come $\sqrt{2}$ (o di un altro, dato che il legame esiste per ogni numero, anche se nel caso generale è complicato da rappresentare). Ciò che segue, tra l'altro, permetterà al lettore interessato di mettersi alla prova.

Riprendiamo la successione delle ridotte di $\sqrt{2}$: 1/1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29, e, per finire, 99/70. Viene naturale chiedersi se la generazione di questi numeri obbedisca a qualche semplice regola. Uno sguardo un po' più attento consente di identificare varie proprietà interessanti, due delle quali, in particolare, suscitano la nostra attenzione. La prima è che la somma del numeratore e del denominatore di una ridotta è uguale al denominatore della ridotta seguente: $1 + 1 = 2$, $3 + 2 = 5$, $7 + 5 = 12$ ecc. La seconda è che raddoppiando il denominatore di una ridotta e aggiungendogli il numeratore si ottiene il numeratore della ridotta successiva: $2 \times 1 + 1 = 3$, $2 \times 2 + 3 = 7$, $2 \times 5 + 7 = 17$ ecc. Le due proprietà, di cui troverete una formula nel prossimo inserto, posso essere sintetizzate così: se p/q e p'/q' sono due ridotte successive messe in forma irriducibile, allora

$$p' = 2q + p \qquad q' = q + p$$

Per dimostrare queste due uguaglianze, si effettua il calcolo seguente:

$$\frac{p'}{q'} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2}}}} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{p}{q}} = \frac{2q + p}{q + p}$$

L'uguaglianza tra le frazioni p'/q' e $(2q + p)/(q + p)$ non implica immediatamente quella tra i numeratori e tra i denominatori, perché l'espressione $(2q + p)/(q + p)$ potrebbe non corrispondere a una frazione irriducibile: ad esempio, il fatto che $2/5 = 4/10$ non implica che $2 = 5$, né che $4 = 10$! Osserviamo però che non avendo p e q alcun divisore comune (si è partiti dall'ipotesi che p/q fosse irriducibile), lo stesso vale per q e $q + p$, così come per $q + (q + p)$ e $q + p$. Dato che $q + (q + p) = 2q + p$, abbiamo dimostrato che la frazione $(2q + p)/(q + p)$ è effettivamente irriducibile, e dunque che $p' = 2q + p$ e $q' = q + p$.

Dobbiamo notare una cosa importante: le formule precedenti funzionano anche per la successione degli approssimanti di Farey «dimenticati» dalle frazioni continue, ovvero 2/1, 4/3, 10/7, 24/17, 58/41...: infatti $2 \times 1 + 2 = 4$ e $1 + 2 = 3$, $2 \times 3 + 4 = 10$ e $3 + 4 = 7$, $2 \times 7 + 10 = 24$ e $7 + 10 = 17$, e così via. Le due successioni di frazioni, dunque, seguono la stessa regola di composizione, e l'unica differenza sta nel punto di partenza: 1/1 per le ridotte, 2/1 per gli altri approssimanti di Farey.

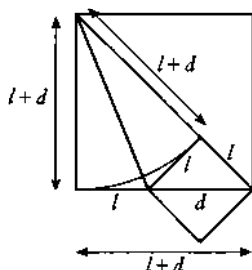
Esistono altri metodi per costruire la sequenza delle ridotte o degli approssimanti di Farey. Se indichiamo con p/q e p'/q' due ridotte consecutive, come nel caso precedente, si possono dimostrare (e ne lasciamo il compito al lettore) alcune proprietà, ad esempio che $q + q' = p'$ (ovvero: la somma dei denominatori di due ridotte consecutive è uguale al numeratore della seconda) e che $p + p' = 2q'$ (ovvero: la somma dei numeratori di due ridotte successive è uguale al doppio del denominatore della seconda). Vi e poi un'altra proprietà, più fondamentale: date tre ridotte consecutive p/q, p'/q' e p''/q'', si ha $p'' = 2p' + p$ e $q'' = 2q' + q$ (si veda l'inserto). Analoghe proprietà valgono anche per la lista degli altri approssimanti di Farey.

Un altro modo di calcolare le ridotte di $\sqrt{2}$ Siano p/q, p'/q' e p''/q'' tre ridotte consecutive di $\sqrt{2}$. In virtù delle formule che abbiamo dimostrato poco fa, si ha che $p'' = 2q' + p' = 2(q + p) + p' = p' + p + (2q + p) = 2p' + p + (2q + p - p') = 2p' + p$. Analogamente, $q'' = q' + p' = q' + 2q + p = 2q' + q + (p - q' + q) = 2q' + q$.
Conosciamo già la sequenza dei numeratori delle ridotte: 1, 3, 7, 17, 41, 99 ecc. Esaminiamo allora la successione dei loro rapporti consecutivi: 3/1, seguito da 7/3, 17/7, 41/17, 99/41, e così via. Questi rapporti valgono, nell'ordine, 3, 2,333..., 2,42857..., 2,41176..., 2,41463... L'impressione è che tendano a un valore unico, che forse il lettore avrà riconosciuto: si tratta di $1 + \sqrt{2}$. Capire la natura profonda di questo fenomeno ci consentirà di esprimere la successione dei numeratori delle ridotte in un modo curioso e inaspettato (lo studio dei denominatori è assolutamente identico).
Spieghiamo anzitutto la presenza di $1 + \sqrt{2}$. Se i rapporti consecutivi degli elementi della nostra successione di numeratori si avvici-

nano effettivamente a un numero x, allora per delle ridotte p/q, p'/q' e p''/q'' prese in un punto abbastanza lontano della successione, p''/p' e p'/p saranno molto vicini a x, e p/p' sarà molto vicino a $1/x$. La relazione $p'' = 2p' + p$ può essere riscritta come $p''/p' = 2 + p/p'$: sostituendo p''/p' e p/p' con i valori ad essi vicini x e $1/x$ si ottiene $x = 2 + 1/x$, e dunque $x^2 - 2x - 1 = 0$. Un calcolo classico dimostra che questa equazione è soddisfatta solo da due numeri, $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$.
Una successione tale che il rapporto dei termini consecutivi sia costante e uguale a $1 + \sqrt{2}$ (o a $1 - \sqrt{2}$), dunque, possiede la stessa proprietà di quella formata dai nostri numeratori: dati tre suoi termini consecutivi x, x' e x'', allora $x'' = 2x' + x$. Ora, una volta fissato il valore a del primo termine di una successione del genere, se ne possono dedurre tutti i termini successivi: nell'ordine, $(1 + \sqrt{2}) \times a$, $(1 + \sqrt{2})^2 \times a$, $(1 + \sqrt{2})^3 \times a$ ecc. Se prendiamo a come «termine numero zero», allora il termine che occupa la n-esima posizione varrà $(1 + \sqrt{2})^n \times a$. La successione prende il nome di «successione geometrica con termine iniziale a e ragione $1 + \sqrt{2}$». Analogamente, la successione il cui n-esimo termine vale $(1 - \sqrt{2})^n \times b$ è la successione geometrica con termine iniziale a e ragione $1 - \sqrt{2}$.
Dunque abbiamo scovato due famiglie di successioni che godono della stessa proprietà della nostra successione di numeratori. Adesso prendiamo due successioni, una per famiglia, e sommiamo i termini corrispondenti, così da ottenere una nuova successione: i suoi termini sono, nell'ordine, $a + b$, $(1 + \sqrt{2}) \times a + (1 - \sqrt{2}) \times b$, $(1 + \sqrt{2})^2 \times$ $\times a + (1 - \sqrt{2})^2 \times b$, $(1 + \sqrt{2})^3 \times a + (1 - \sqrt{2})^3 \times b$, e così via. Un calcolo elementare dimostra che anche la nuova successione, il cui n-esimo termine vale $(1 + \sqrt{2})^n \times a + (1 - \sqrt{2})^n \times b$, soddisfa la proprietà $x'' = 2x' + x$.
Nel paese delle successioni che soddisfano quest'ultima proprietà, due successioni che hanno gli stessi primi due termini sono necessariamente identiche. Cominciamo, ad esempio, con 3 e 4. Il termine successivo deve essere per forza uguale a $2 \times 4 + 3 = 11$, quello seguente $2 \times 11 + 4 = 26$ ecc.: perciò non esistono due successioni distinte che comincino entrambe con 3 e 4.
I calcoli dimostrano che, per qualsiasi coppia di termini iniziali x e x', esistono sempre due valori a e b tali che $a + b = x$ e $(1 + \sqrt{2}) \times a +$ $+ (1 - \sqrt{2}) \times b = x'$. In particolare, per $x = 1$ e $x' = 3$ (i primi due termini della serie dei numeratori), si ha $a = (1 + \sqrt{2})/2$ e $b = (1 -$

$-\sqrt{2})/2$. In tal caso, per quanto si è detto prima, la successione il cui n-esimo termine vale $(1+\sqrt{2})^n \times a + (1-\sqrt{2})^n \times b$ diventa identica a quella dei numeratori. In altri termini, ed è un risultato quantomeno inatteso, la successione 1, 3, 7, 17, 41, 99 ... si ottiene applicando la formula seguente con $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ...:

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

Con un'analisi identica si trova, per la successione dei denominatori:

$$\frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$$

Chi avrebbe mai detto che delle espressioni del genere potessero generare dei numeri interi? Tutto ciò ha un'importanza più che aneddotica, poiché è legato ad alcune interessanti proprietà della «distribuzione modulo 1» di certe successioni (vedi cap. 21).

Numeri diagonali, numeri laterali

Le due successioni numeriche 1, 3, 7, 17, 41, 99 ... e 1, 2, 5, 12, 29, 70 ... sono state studiate ben prima dell'avvento delle frazioni continue: se ne trova traccia per la prima volta nel II secolo, negli scritti del greco Teone di Smirne. La prima successione, che corrisponde ai numeratori delle ridotte, rappresenta per Teone l'insieme dei «numeri diagonali», e la seconda, quella dei denominatori, l'insieme dei numeri «laterali». Sono denominazioni che si spiegano riprendendo la figura che avevamo visto nel corso del capitolo precedente, e che illustra geometricamente l'antiferesi tra la diagonale e il lato di un quadrato: considerando la figura «a ritroso», cioè mostrando dei quadrati sempre più grandi (anziché sempre più piccoli) a partire da un quadratino iniziale di lato l e diagonale d, il quadrato più grande ha il lato uguale a $l + d$ e la diagonale uguale a $(l + d) + l = 2l + d$.

La regola che determina i lati e le diagonali dei quadrati successivi, dunque, è la stessa che genera i numeri laterali e diagonali. Il fatto curioso è che Teone non fa mai l'accostamento, se non nel-

l'uso del termine «diagonale» (così come non parla mai della radice quadrata di 2 o del concetto di incommensurabilità), e bisognerà aspettare Proclo, nel V secolo, per spiegare che «quando alla diagonale si aggiunge il lato di cui è la diagonale, questa diventa lato, mentre il lato, venendo aggiunto a se stesso e ricevendo inoltre la propria diagonale, diventa una diagonale».

In termini moderni, ciò che interessava a Teone era il fatto che, se l è un numero laterale e d il numero diagonale corrispondente, allora la differenza $d^2 - 2l^2$ è sempre uguale a 1 o a -1. Ecco come dimostrarlo: indichiamo con e il valore $d^2 - 2l^2$ e esaminiamo il valore dell'espressione $(2l + d)^2 - 2 \times (l + d)^2$, che non è altro che la stessa differenza, ma «un passo avanti» (d è stato sostituito da $2l + d$, e l da $l + d$). I calcoli danno: $(2l + d)^2 - 2 \times (l + d)^2 = 4l^2 + d^2 + 4ld - (2l^2 + 2d^2 + 4ld) = 2l^2 - d^2 = -s$. Lo scarto tra il quadrato del numero diagonale e il doppio del quadrato del numero laterale corrispondente, dunque, resta lo stesso, cambiando solo di segno (da s si passa a $-s$). Per la prima coppia di numeri laterale e diagonale ($l = 1$ e $d = 1$) la differenza è uguale a 1. Per le coppie successive si alternano i valori 1 e -1, a dimostrazione del fatto che i numeri laterali e diagonali forniscono un'infinità di esempi di coppie di interi m e n tali che $m^2 - 2n^2 = 1$ (ed esempi in cui $m^2 - 2n^2 = -1$).

La ricerca di soluzioni a relazioni più generali, come $m^2 - kn^2 = 1$ (con k intero), o del tipo ancora più generale $m^2 - kn^2 = r$ (con r intero), è stata analizzata in maniera dettagliata dai matematici indiani tra il VI e l'XI secolo. Anche se non sembra che abbiano dimostrato i metodi impiegati, sono stati capaci di utilizzarli in casi molto complessi, dimostrando senza ombra di dubbio di essere convinti, per qualche ragione, della validità degli algoritmi impiegati,

come la *cakravala* («metodo ciclico») che permette, dato un intero k qualsiasi, di trovare una soluzione all'equazione $m^2 - kn^2 = 1$.

L'equazione $m^2 - kn^2 = 1$ riappare in Europa dalla penna del francese Pierre de Fermat, nel 1657. Il legame con le frazioni continue viene stabilito un secolo più tardi grazie ai lavori di Eulero e di Lagrange, in cui si stabilisce che le uniche soluzioni dell'equazione $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ si ottengono attraverso i numeri laterali e diagonali di Teone o, per utilizzare un linguaggio più attuale, attraverso le ridotte dello sviluppo della radice di 2 in frazione continua.

Eulero ha chiamato l'equazione $m^2 - kn^2 = 1$ «equazione di Pell», commettendo così un errore sul piano storico: il matematico britannico John Pell, cui egli attribuiva la paternità dell'analisi dell'equazione, non ha infatti nulla a che vedere con quest'ultima. Il nome, però, è rimasto, anche se oggi è più facile sentir parlare dell'equazione di Pell-Fermat. Forse le si potrebbe associare il nome di Brahmagupta, vista l'anteriorità dei lavori del matematico indiano sull'argomento.

Troppo vicina ai razionali per farne parte

Dall'esistenza di un'infinità di soluzioni all'equazione di Pell-Fermat si deduce una bella dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2. Dal momento che si serve di soluzioni dell'equazione di Pell-Fermat $m^2 - 2n^2 = \pm 1$ a loro volta deducibili da una «antiferesi a ritroso», la dimostrazione che stiamo per illustrare può essere considerata come una sorta di «ascesa infinita» che prende il posto della «discesa infinita» di cui abbiamo parlato nel capitolo 5.

L'idea di fondo è questa: mentre un numero razionale non può essere approssimato «bene» da altri numeri razionali, le soluzioni dell'equazione di Pell-Fermat portano ad approssimazioni di $\sqrt{2}$ attraverso numeri razionali «troppo buone» perché la stessa $\sqrt{2}$ possa essere a sua volta razionale.

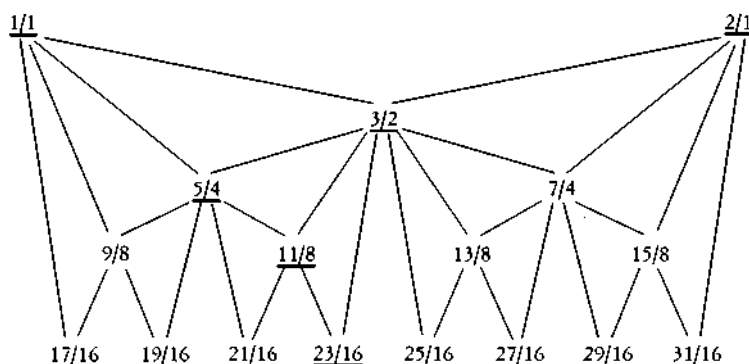
Per rendere il tutto più chiaro, consideriamo un numero razionale a/b, e cerchiamo di approssimarlo con un altro numero razionale p/q, di cui assumiamo che sia diverso da a/b. la differenza tra i due si scrive $p/q - a/b = (pb - qa)/qb$. Il numeratore di quest'ultima fra-

zione non può essere nullo, altrimenti p/q e a/b sarebbero uguali (un'eventualità che abbiamo escluso in partenza). Il numeratore è un numero intero, e quindi deve essere almeno uguale a 1 (a parte il segno): di conseguenza, lo scarto tra a/b e p/q è almeno uguale a $1/qb$. Ecco quantificato in maniera precisa ciò che dicevamo sul fatto che un numero razionale a/b non può mai essere approssimato «perfettamente» da un altro (p/q): lo scarto tra i due è di almeno $1/qb$. Certo, per ora, affermare che $1/qb$ è una differenza significativa è quantomeno arbitrario: la situazione diventa più chiara quando la si paragona alla differenza ottenibile approssimando $\sqrt{2}$ mediante numeri razionali a partire dalle soluzioni dell'equazione di Pell-Fermat.

A tale scopo, consideriamo due interi, p e q, tali che $p^2 - 2q^2 = 1$ (la costruzione di Teone ci garantisce che ne esiste un'infinità). Dividendo l'uguaglianza per q^2, si ottiene $(p/q)^2 - 2 = 1/q^2$, da cui, in virtù dell'uguaglianza notevole $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$:

$$\left(\frac{p}{q} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right) = \frac{1}{q^2}$$

Dato che p e q costituiscono una coppia di interi che soddisfa l'equazione di Pell-Fermat, il loro rapporto, p/q, si avvicina a $\sqrt{2}$. Il fattore $(p/q + \sqrt{2})$ del membro sinistro dell'uguaglianza precedente, dunque, si avvicina a $2\sqrt{2}$, e vi si avvicina sempre di più man mano che p e q diventano grandi. Per un'infinità di interi, dunque, si ottiene la relazione (approssimativa) seguente:

$$\frac{p}{q} - \sqrt{2} \approx \frac{1}{(2\sqrt{2}) \cdot q^2}$$

A quanto pare, quindi, l'approssimazione di $\sqrt{2}$ mediante numeri razionali è molto più efficace di quella del numero razionale a/b che abbiamo visto in precedenza: mentre per quest'ultimo la precisione dell'approssimazione è tutt'al più proporzionale al denominatore del numero razionale approssimante, esistono dei numeri razionali p/q che approssimano $\sqrt{2}$ con una precisione dell'ordine del *quadrato* del denominatore, ovvero con un'efficacia decisamente maggiore. La radice quadrata di 2, quindi, ha una qualità che nessun numero razionale possiede: è un numero irrazionale.

La valutazione della precisione raggiungibile nell'approssimare un numero attraverso numeri razionali è un'idea che risale a Joseph Liouville, che nel 1844 dimostrò che i numeri algebrici non possono essere approssimati «troppo bene» da numeri razionali: attraverso la costruzione esplicita di numeri approssimati troppo bene da numeri razionali Liouville ne dedusse che si trattava di numeri trascendenti. È a lui, quindi, che dobbiamo la prima dimostrazione dell'esistenza di questo tipo di numeri, esistenza che fino ad allora era stata solo ipotizzata dalla comunità dei matematici (nel capitolo 22 ritorneremo sulle questioni di approssimazione dei numeri mediante frazioni). La dimostrazione precedente dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ rappresenta una sorta di introduzione ai metodi che, partendo dai lavori originali di Liouville, hanno conosciuto numerosi sviluppi.

19.

Il mondo dei numeratori

Uno sguardo nuovo sulla dicotomia

Nel capitolo 14 abbiamo esaminato il processo di dicotomia, utilizzato per approssimare un numero come $\sqrt{2}$ e che consiste nel prendere due numeri a e b, uno minore di $\sqrt{2}$ e l'altro maggiore (cioè $a^2 < 2 < b^2$) per poi provare con un numero c compreso tra i due: se $c^2 < 2$ si ricomincia con c e b, altrimenti con a e c.

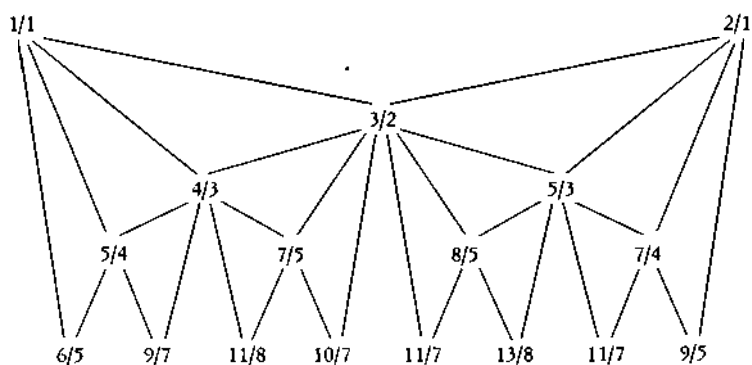
La dicotomia classica consiste nel prendere per c la media aritmetica di a e b, cioè il valore $(a + b)/2$. Prendendo come valori iniziali $a = 1$ e $b = 2$, applicare la dicotomia «aritmetica» significa percorrere l'albero rappresentato nella figura seguente, in cui ogni frazione è la media aritmetica delle due frazioni del livello superiore con cui la frazione è connessa attraverso dei segmenti.

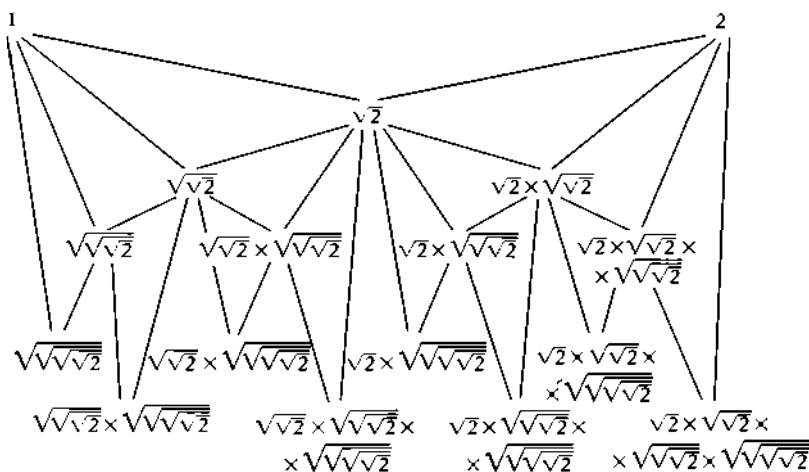
L'albero aritmetico

Le frazioni che nella figura appaiono sottolineate sono quelle che compaiono nella dicotomia applicata alla stima di $\sqrt{2}$. Gli intervalli in cui si trova racchiusa la radice di 2 sono, nell'ordine: [1, 2], [1, 3/2], [5/4, 3/2], [11/8, 3/2], [23/16, 3/2]...

La dicotomia aritmetica permette di avvicinarsi a $\sqrt{2}$ (o ad altri numeri) con frazioni i cui denominatori sono potenze di 2. In altri termini, le approssimazioni ottenute sono numeri «diadici», ovvero l'equivalente dei numeri decimali per la base 2. In effetti, proprio come le frazioni il cui denominatore è una potenza di dieci corrispondono a numeri con una quantità finita di cifre dopo la virgola (come, ad esempio, 1272/1000, uguale a 1,272), le frazioni che hanno come denominatore una potenza di due corrispondono a quei numeri la cui espressione in base due a un certo punto si ferma. Ad esempio, il numero 11/32 si scrive, in base due, come 0,01011 ($11/32 = 1/32 + 10/32 = 1/32 + 5/16 = 1/32 + 1/16 + 4/16 = 1/32 + 1/16 + 1/4$, ovvero $11/32 = 0 + 0/2 + 1/4 + 0/8 + 1/16 + 1/32$, che quindi può essere scritto come 0,01011 in base due).

Alla dicotomia, quindi, corrisponde in maniera naturale la rappresentazione binaria dei numeri. Un altro modo di esprimere questa corrispondenza consiste nel dire che lo sviluppo in base due di un numero x (compreso tra 1 e 2) si ottiene percorrendo l'albero precedente, e scrivendo 0 ogni volta che si va a sinistra e 1 ogni volta che si va a destra.

Manteniamo questo punto di vista, ma cambiamo il modo con cui scegliamo c in funzione di a e b: se a e b sono due frazioni, pren-

L'albero di Stern-Brocot

diamo per c la frazione mediante, quella del metodo di Stern-Brocot che abbiamo costruito nel capitolo precedente (ricordiamo che la mediante di p/q e r/s è la frazione $(p + r)/(q + s)$, come è illustrato dalla figura precedente.

Se scriviamo S ogni volta che nell'albero di Stern-Brocot andiamo a sinistra, e D ogni volta che andiamo a destra, otterremo lo «sviluppo di Stern-Brocot», che nel caso della radice quadrata di 2 (e partendo dalla frazione 3/2), non è altro che SDDSSDDSSDDSSDD...: due volte a destra, due volte a sinistra, e così via (tranne la prima volta, quando si va a sinistra solo una volta). Scriviamo 1 al posto della prima S, 2 al posto delle due D successive, di nuovo 2 al posto delle due S che seguono, e poi ancora 2, e 2, e via dicendo: abbiamo così 122222..., che non è altro che la successione dei quozienti parziali di $\sqrt{2}$. Più generalmente, dato un numero x qualsiasi, la successione che si ottiene attraverso la dicotomia di Stern-Brocot è quella dei suoi quozienti parziali. In altri termini, se alla dicotomia aritmetica corrisponde lo sviluppo in base due, alla dicotomia di Stern-Brocot corrisponde lo sviluppo in frazione continua.

L'albero geometrico

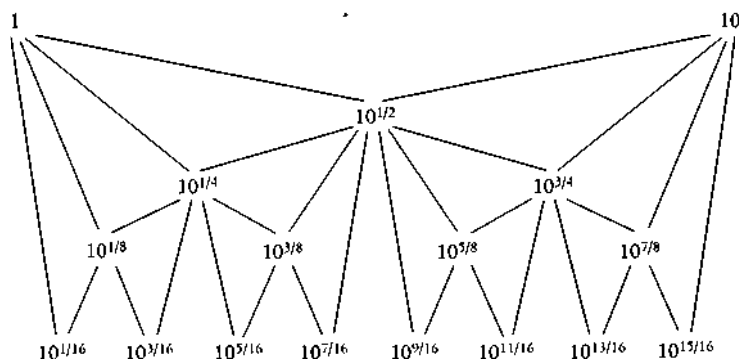
Da quanto si è appena detto, sia lo sviluppo in base sia che quello in frazione continua provengono da un albero in cui ogni numero (ogni frazione) è calcolato a partire da altri due, secondo la media aritmetica nel primo caso e con la regola di Stern-Brocot nel secondo. L'estensione naturale di questi due casi, quindi, consiste nell'analizzare cosa succede a un albero costruito con altre regole.

L'idea generale alla base della costruzione di un albero è assimilabile a un problema di mediazione: dati due numeri, se ne vuole generare un terzo che sia compreso tra i due. Visto che abbiamo già esaminato la media aritmetica, occupiamoci ora degli altri due tipi di media più comuni, e di cui abbiamo già parlato (vedi cap. 10): le media geometrica e quella armonica.

Partendo dai valori iniziali 1 e 2, la media geometrica fa apparire delle radici quadrate di 2 annidate secondo un «albero geometrico» come il seguente:

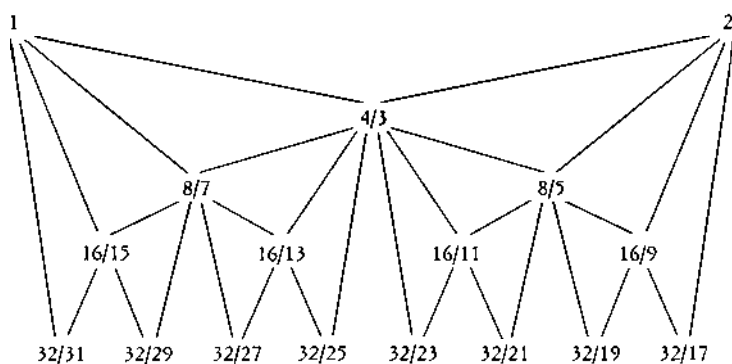
L'albero geometrico

La rappresentazione dei numeri che ci viene suggerita da quest'albero è legata all'importante questione della determinazione dei logaritmi, esaminata nel capitolo 13. Per capirne la ragione, sostituiamo il 2 in alto a destra nell'albero precedente con un 10, e scriviamo come potenze di 10 gli elementi dell'albero che ne derivano.

Immaginiamo di cancellare tutti i 10, e di lasciare solo gli esponenti: ritroviamo un albero aritmetico (costruito, stavolta, a partire dai valori iniziali 0 e 1 anziché 1 e 2 come nel caso dell'albero aritmetico visto in precedenza). Adesso prendiamo un numero x

compreso tra 1 e 2, e indichiamo con y il suo logaritmo in base dieci, vale a dire quel numero che soddisfa l'uguaglianza $x = 10^y$: la relazione che abbiamo appena stabilito tra gli alberi geometrici e quelli aritmetici fa sì che l'espressione di x data dal nostro albero geometrico coincida esattamente con l'espressione di y data dall'albero aritmetico. In altri termini, l'albero geometrico precedente rappresenta x attraverso lo sviluppo in base due del suo logaritmo (logaritmo che, dal canto suo, è in base dieci, avendo scelto il valore 10 in alto a destra nell'albero; va da sé che saremmo potuti partire da un altro numero b, ottenendo in tal caso dei logaritmi in base b – ma sempre espressi in base 2).

L'impareggiabile armonia di $\sqrt{2}$

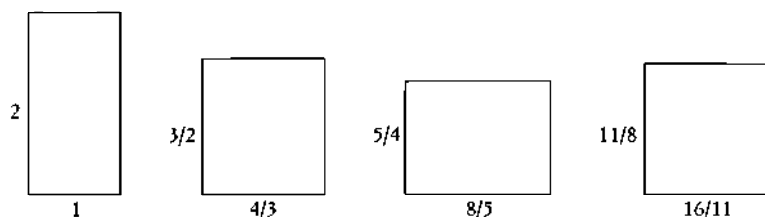
Albero aritmetico, albero geometrico... ce ne rimane un terzo: quello costruito a partire dalla media armonica, che ci consentirà di evidenziare un'altra proprietà notevole della radice quadrata di 2. Partendo da 1 e 2, costruiamo l'albero dei numeri ottenuti per medie armoniche successive, ricordando che la media armonica di due numeri a e b è data dall'espressione $2/((1/a) + (1/b))$. Ecco come comincia il nostro «albero armonico» (non sappiamo se sia già stato oggetto di studio – ci sarebbe da stupirsi del contrario).

Lasciamo al lettore la libertà di esplorare le ragioni per cui «il più bell'albero armonico» è quello che si ottiene partendo da 1 e 2. In

L'albero armonico

tal caso ogni livello raggruppa, nell'ordine, tutte le frazioni comprese tra 1 e 2 e i cui numeratori sono costituiti da una stessa potenza di 2: $2^2 = 4$, poi $2^3 = 8$, $2^4 = 16$ ecc. (è sottinteso che le frazioni sono espresse tutte in forma irriducibile). L'albero, quindi, fa eco a quello costruito a partire dalla media aritmetica: la differenza più evidente è che in questo caso sono i numeratori a essere costanti a ogni livello.

Come nel caso degli alberi precedenti, possiamo utilizzare l'albero armonico come strumento di rappresentazione di un numero x, percorrendo l'albero alla ricerca di valori sempre più vicini a x e scrivendo S o D a ogni tappa a seconda della direzione presa, sinistra o destra. Per convenzione, cominciamo a scrivere «1,», e partiamo dal valore 4/3 (il lettore potrà verificare che si tratta effettivamente della convenzione analoga a quella che, nel caso dell'albero aritmetico, porta alla scrittura in base due). Così, lo «sviluppo armonico» del numero 16/13 si scrive 1,SD, quello di 32/19 si scrive 1,DDS e così via.

E la radice quadrata di 2? Trattandosi di un numero irrazionale, e dato che ogni livello dell'albero armonico contiene solo frazioni, lo sviluppo armonico di $\sqrt{2}$ è infinito. I calcoli mostrano che il suo inizio è:

$$\sqrt{2} = 1,\text{DSSDSDSDDDDDSDDS}\ldots$$

Ora ricordiamoci l'inizio dello sviluppo di $\sqrt{2}$ in base due: $\sqrt{2} = 1{,}0110101000001001\ldots$

Sorpresa: i due sviluppi sono identici! Per la precisione, a ogni S dello sviluppo armonico di $\sqrt{2}$ corrisponde un 1 nello sviluppo diadico, e a ogni D corrisponde uno 0. È possibile che si tratti di una semplice coincidenza, destinata ad andare avanti solo per qualche S e qualche D? La risposta è no: la corrispondenza sussiste anche quando ci si spinge molto più in là con lo sviluppo.

Qual è l'origine di questa identità stupefacente? La spiegazione viene dalla relazione tra la media aritmetica e quella armonica, di cui ci siamo già serviti nei capitoli 10 e 14: indicando rispettivamente con m e h la media aritmetica e la media armonica di due numeri a e b, si ha $mh = ab$.

Prendiamo un rettangolo con i lati che misurano, rispettivamente, 1 e 2, come abbiamo fatto nel capitolo 10. Sostituiamo 1 e 2 con

3/2 e 4/3, cioè, rispettivamente, con la media aritmetica e la media armonica di 1 e 2. Da un lato, visto che $\sqrt{2}$ è compreso tra 1 e 3/2, la seconda tappa della dicotomia aritmetica consiste nel prendere la media (aritmetica) tra 1 e 3/2, che vale 5/4. Dall'altro, dato che $\sqrt{2}$ è compreso tra 4/3 e 2, la seconda tappa della dicotomia armonica consiste nel prendere la media (armonica) tra 4/3 e 2, ottenendo 8/5.

La tappa successiva della dicotomia aritmetica consiste nel calcolare la media aritmetica di 5/4 e 3/2 (che vale 11/8), mentre la dicotomia armonica parte dai valori 8/5 e 4/3 per dare 16/11. Il rettangolo con i lati uguali a 5/4 e 8/5 e quello con i lati uguali a 11/8 e 16/11 hanno entrambi l'area uguale a 2. A ogni nuova tappa si costruisce un nuovo rettangolo partendo dalle medie (aritmetica e armonica) delle lunghezze dei lati di due altri rettangoli: di questi, uno ha l'altezza che è maggiore di $\sqrt{2}$ mentre l'altro ce l'ha più piccola. A ogni tappa, l'area del nuovo rettangolo vale 2. A ogni dicotomia aritmetica sui lati verticali, quindi, corrisponde la dicotomia armonica sui lati orizzontali, ma in modo inverso: quando la media aritmetica è maggiore di $\sqrt{2}$, la media armonica è più piccola (a causa delle aree, che sono sempre uguali a 2). È così che le due dicotomie, quella aritmetica e quella armonica, si parlano e si rispondono.

Il ragionamento precedente, inoltre, permette di dimostrare che la coincidenza degli sviluppi – diadico e armonico – si osserva solamente per la radice quadrata di 2, media geometrica di 1 e 2, che da questo punto di vista, dunque, è davvero il numero più notevole. Dallo stesso ragionamento otteniamo anche una dimostrazione particolarmente inattesa del fatto che $\sqrt{2}$ non è un numero diadico (il che vuol dire che il suo sviluppo in base due è illimitato), e che vi presentiamo subito: se lo sviluppo di $\sqrt{2}$ fosse finito, allora lo sarebbe anche il suo sviluppo armonico (essendo identici), e dunque

$\sqrt{2}$ sarebbe uguale contemporaneamente a una frazione dell'albero aritmetico e a una dell'albero armonico, il che non è possibile, perché i due alberi, come si può dimostrare immediatamente, non hanno elementi in comune (lasciamo al lettore il compito di studiare come generalizzare questo risultato per dimostrare che $\sqrt{2}$ è irrazionale).

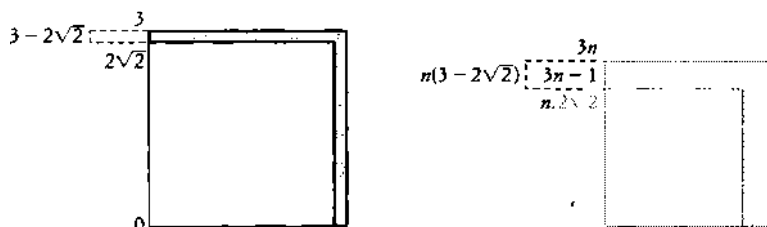
Il metodo di Newton e le frazioni continue

Quanto abbiamo detto fin qui è utile per spiegare la somiglianza tra gli sviluppi diadico e armonico della radice quadrata di 2, ma mette anche in evidenza un metodo per approssimare $\sqrt{2}$ che si rivela molto più lento di quello che abbiamo visto nel capitolo 10, e da cui deriva il metodo di Erone. Quest'ultimo, lo ricordiamo, consiste nel partire da una stima iniziale L di $\sqrt{2}$ e nel sostituire ripetutamente L con $L/2 + 1/L$.

Se si parte da una stima iniziale esprimibile in forma frazionaria, come ad esempio 1, o 3/2, la formula di Erone fornisce una successione di approssimazioni esprimibili a loro volta come frazioni. Viene del tutto spontaneo chiedersi se queste frazioni che approssimano $\sqrt{2}$ hanno qualcosa a che fare con le ridotte della frazione continua di $\sqrt{2}$ (vedi cap. precedente). La risposta è sì: nel 1847, Joseph-Alfred Serret ha dimostrato che applicando una volta la formula di Erone alla ridotta p_n/q_n (la ridotta che si ottiene prendendo i primi n quozienti parziali) si trova la ridotta p_{2n}/q_{2n} (il risultato è valido tanto per $\sqrt{2}$ quanto per le altre radici quadrate di numeri interi); in particolare, partendo da $L = 1 = p_1/q_1$, si ottiene, successivamente, $3/2 = p_2/q_2$, $17/12 = p_4/q_4$, $577/408 = p_8/q_8$, $665\,857/470\,832 = p_{16}/q_{16}$, $886\,731\,088\,897/627\,013\,566\,048 = p_{32}/q_{32}$, eccetera. Il fatto che l'indice delle ridotte raddoppi a ogni iterazione fa eco alla convergenza quadratica del metodo di Newton di cui abbiamo parlato nel capitolo 14.

Le osservazioni da fare sulle approssimazioni di $\sqrt{2}$ ottenibili con il metodo di Newton, tuttavia, sono molto più numerose. Esiste un legame, infatti, tra queste e un altro modo di esprimere la radice quadrata di 2 servendosi di un secondo tipo di «frazione senza fine», diverso dalle frazioni continue del capitolo 17. Ricordiamo che queste ultime si basano sull'antiferesi, un procedimento che consi-

ste nel cercare un'unità di misura comune a due grandezze a e b (la diagonale e il lato del quadrato, ad esempio): le due grandezze sono incommensurabili se, e solo se, la ricerca non ha mai fine, cioè se i segmenti in gioco diventano sempre più piccoli, senza fermarsi mai.

Il punto di vista opposto, quindi, consiste nel cercare non più un segmento più piccolo di a e b e capace di misurarli entrambi, bensì un segmento c più grande, e misurabile sia da a che da b. Se esistono due interi p e q tali che $c = qa$ e $c = pb$, infatti, allora $qa = pb$ e dunque $a/b = p/q$, da cui si conclude che a e b sono grandezze commensurabili.

I due punti di vista si corrispondono in maniera del tutto naturale, ma il secondo, che è alla base del concetto di «frazione continua ascendente» (si veda oltre), è citato di rado. Senza entrare nei dettagli, il suo corrispondente aritmetico è la ricerca di un minimo comune multiplo, mentre l'antiferesi corrisponde alla ricerca di un massimo comun divisore.

Per sapere se un numero x è razionale o meno servendosi di questi «antiferesi inversa» si fa così. Indichiamo con y la parte frazionaria di x, e prendiamo in esame il più piccolo intero n tale che ny sia maggiore o uguale a 1. Si definisce $x' = ny - 1$, si indica con y' la parte frazionaria di x' e con n' il più piccolo intero tale che $n'y'$ è maggiore o uguale a 1, e così via: x è razionale se, e solo se, si giunge a un punto in cui la parte frazionaria è nulla. Ad esempio, se $x = 16/11$, si ha $y = 5/11$, e quindi $n = 3$ e $x' = 15/11$; ne segue che $y' = 4/11$, e perciò che $n' = 3$ e $x' = 12/11$, da cui si trova che $y'' = 1/11$, $n'' = 11$, $x'' = 1$, e infine $y''' = 0$ (osserviamo, sempre senza entrare nei dettagli, come questo esempio illustri quello che risulta essere un caso generale: il minimo comune multiplo di 16 e 11 si ottiene moltiplicando il numeratore, 16, per l'ultimo intero non nullo tra n, n' ecc., che nella fattispecie è 11).

Vediamo ora una versione geometrica che consente di trattare il caso della radice quadrata di 2 e che, malgrado la sua relativa semplicità, sembra non essere mai stata presentata (la sua estensione ad altri numeri è immediata). Per ragioni di pura comodità nei calcoli (il lettore potrà cercare di scoprirne la ragione profonda), il nostro valore iniziale x non è $\sqrt{2}$, ma $3 - 2\sqrt{2}$: lo visualizzeremo con due segmenti, uno di lunghezza $2\sqrt{2}$ e l'altro di lunghezza 3. Costruiamo poi i quadrati costruiti su ciascuno dei due segmenti:

il primo ha area $(2\sqrt{2})^2 = 8$, il secondo $3^2 = 9$; l'area della «squadra» (in grigio) nella figura seguente, dunque, è di $9 - 8 = 1$.

Il problema è quello di sapere per quale intero va moltiplicato $3 - 2\sqrt{2}$ per superare 1. Ingrandiamo di un fattore n la figura precedente: $2\sqrt{2}$ diventa $2\sqrt{2} \times n$, 3 diventa $3n$, l'area del quadrato più piccolo passa da 8 a $8n^2$, quella del più grande da 9 a $9n^2$; quella della squadra, infine, passa da 1 a n^2. L'idea chiave è la seguente: se $n(3 - 2\sqrt{2})$ è maggiore di 1, allora l'area della nostra squadra è maggiore di quella costruita sui punti $3n$ e $3n - 1$. Un calcolo (che lasciamo al lettore) dimostra che quest'ultima è uguale a $6n - 1$.

Stiamo cercando, dunque, il più piccolo intero n tale che n^2 sia maggiore o uguale a $6n - 1$: è facile vedere che n deve essere uguale a 6. Moltiplichiamo quindi le nostre lunghezze per 6: $3 - 2\sqrt{2}$ diventa $18 - 12\sqrt{2}$, definendo x'. Sottraendo 1 otteniamo y', che vale $17 - 12\sqrt{2}$: i calcoli dimostrano che l'area della nuova squadra vale di nuovo 1, e quindi che n' è uguale a 34, il doppio di 17. A ogni iterazione, il fattore da applicare per passare dalla lunghezza $p - q\sqrt{2}$ a una lunghezza maggiore di 1 è uguale a $2p$, con la formazione di una nuova squadra di area unitaria. Quest'area, in particolar modo, non si annulla mai, e quindi $3 - 2\sqrt{2}$, la nostra lunghezza di partenza, è irrazionale. Se ne deduce che lo è anche $\sqrt{2}$.

Così come le differenti tappe dell'antiferesi consentono di ottenere attraverso una riscrittura algebrica lo sviluppo in frazione continua, quanto si è detto fornisce per la radice quadrata di 2 l'espressione seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \times 6} - \frac{1}{2 \times 6 \times 34} - \frac{1}{2 \times 6 \times 34 \times 1154} - \frac{1}{2 \times 6 \times 1154 \times 1331714} - \dots$$

Alla sequenza di numeri 6, 34, 1154, 1 331 714 si arriva così: ogni nuovo termine si ottiene raddoppiando il numeratore della tappa precedente. Per la precisione, si parte da $1 + 1/2 = 3/2$: il 6 si ottiene raddoppiando il 3. Dopo di che, si ha $1 + 1/2 - 1/(2 \times 6) = 17/12$: il 34 si ottiene raddoppiando il 17, e così via (lasciamo al lettore il compito di dimostrare in maniera generale quest'altro modo di costruire la successione: si ha $34 = 6^2 - 2$, poi $1154 = 34^2 - 2$, $1\,331\,714 = 1154^2 - 2$, e via dicendo).

È qui che assistiamo a un ritorno inatteso del metodo di Newton: la successione delle approssimazioni di $\sqrt{2}$ data dall'espressione precedente (1, poi $1 + 1/2$, $1 + 1/2 - 1/(2 \times 6)$ ecc.) è esattamente la stessa di quella fornita dal metodo di Erone. Questa osservazione – che il lettore potrà cercare di dimostrare – mostra che il metodo di Erone, lungi dall'essere riducibile a un metodo di approssimazione efficace, è connesso, per certi aspetti, alla struttura matematica fondamentale della radice quadrata di 2.

Ottenere tutte le ridotte di $\sqrt{2}$ con il metodo di Newton Vari autori si sono interessati, negli ultimi tempi, al problema della ricerca di un'altra funzione (oltre a $x^2 - 2$) cui applicare il metodo di Newton con l'obiettivo di identificare una successione di approssimazioni di $\sqrt{2}$ (in maniera più generale: di numeri quadratici) che sia formata da tutte le sue ridotte, e non solo da una parte. Nel 1999, Georg Rieger ha prodotto il primo risultato in tal senso, per le ridotte del numero $(\sqrt{5} - 1)/2$ (che differisce di un'unità dal numero aureo, di cui parleremo nei capitoli 23 e 24). Due anni dopo, Takao Komatsu lo ha esteso ad altri numeri, tra i quali $\sqrt{2} - 1$. Nel 2004, Edward Burger ha presentato un risultato generale, dando, per una vasta classe di numeri quadratici α (minori di 1 per ragioni tecniche), una funzione esplicita, anche se un po' complicata da scrivere in forma generale: applicandole il metodo di Newton, la formula dà tutte le ridotte di α del tipo p_{nL}/q_{nL}, dove L è un intero che dipende esclusivamente da α. Applicata ad $\alpha = \sqrt{2} - 1$, la formula di Berger ne dà tutte le ridotte di indice pari (p_2/q_2, p_4/q_4, p_6/q_6 ecc.) Grazie a qualche ricerca, siamo riusciti a capire come migliorare questo risultato: esiste una funzione f a partire dalla quale il metodo di Newton fornisce *tutte* le ridotte (e non solo quelle di indice pari) di $\sqrt{2} - 1$).

Il lettore potrà verificare che partendo dal valore iniziale $x = 1$ e applicando la formula di Newton alla funzione f data da

$$f(x) = |x - \sqrt{2}|^{\frac{(2+\sqrt{2})}{4}} \cdot |x + \sqrt{2}|^{\frac{(2-\sqrt{2})}{4}}$$

si ottengono effettivamente tutte le ridotte di $\sqrt{2}$, un risultato quantomeno difficile da immaginare: il fatto che da una funzione del genere si ottenga una sequenza di numeri razionali non è affatto evidente!

Frazioni che salgono

Fattorizzando termine a termine l'espressione di $\sqrt{2}$ data poco fa, si ottiene:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{34}\left(1 + \frac{1}{1154}\left(1 + \frac{1}{1331714}(1 + \ldots)\right)\right)\right)\right)$$

che possiamo riscrivere così:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1 - \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 + \cfrac{1}{1331714}}{1154}}{34}}{6}}{2}$$

Si tratta di un'espressione della radice quadrata di 2 che ha la forma di una frazione continua che «parte al contrario», cioè dal lato del numeratore. Si parla allora di «frazione continua ascendente». La presenza di un segno meno davanti al denominatore 6 è dovuta a una ragione tecnica (la stessa per cui poco fa siamo partiti da $3 - 2\sqrt{2}$).

Anche se meno note di quelle «ordinarie», le frazioni continue ascendenti hanno una storia molto lunga. Abbiamo già visto nel

primo capitolo l'approssimazione di $\sqrt{2}$ trovata in India nell'antichità:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 4} - \frac{1}{3 \times 4 \times 34}$$

Tale approssimazione (che, come abbiamo detto, gli Indiani consideravano forse come esatta), può essere riscritta in forma di frazione continua ascendente:

$$\sqrt{2} \approx 1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 - \cfrac{1}{34}}{4}}{3}$$

Nel primo capitolo abbiamo visto come gli Indiani abbiano potuto servirsi di questa espressione di $\sqrt{2}$ per elaborare una scala di misura delle lunghezze; abbiamo detto inoltre che anche gli Egizi avevano elaborato una scala basata sulla radice quadrata di 2, benché più rudimentale. I punti di contatto tra le due civiltà si estendono, almeno in parte, alle frazioni continue ascendenti: l'espressione indiana di $\sqrt{2}$ ne è palesemente un prototipo, e gli Egizi, dal canto loro, hanno messo a punto un insieme di tecniche per effettuare operazioni assimilabili allo sviluppo di numeri razionali in frazioni continue ascendenti.

Gli Egizi disponevano di un concetto di frazione che si limitava a quelle il cui numeratore è uguale a 1, come 1/5 o 1/9 (con l'unica eccezione di 2/3, che erano in grado di utilizzare). Uno dei problemi che dovevano affrontare, dunque, era quello di esprimere attraverso tali frazioni (dette «egizie») una quantità razionale data. L'idea di fondo che emerge dalle tecniche egizie è questa. Si abbiano, ad esempio, cinque unità di un bene da dividere in maniera equa tra tredici persone. Si tratta perciò di esprimere la quantità 5/13. Anzitutto frazioniamo ognuna delle unità in tre parti. Perché tre? Perché si tratta del più piccolo numero che permetta di ottenere un numero di parti non inferiore al numero di persone (in questo caso $3 \times 5 = 15$, effettivamente maggiore di 13). Distribuiamo una parte per persona: ne restano $15 - 13 = 2$. Ricominciamo dunque con le due parti rimanenti, dividendole ognuna in sette parti, così da ottenere un totale di 14. Tredici di queste vengono distri-

buite, e ce ne rimane una, che dividiamo in tredici ripartendola tra tutti quanti. A questo punto non c'è più niente da distribuire, e la suddivisione è finita. Tutto ciò può essere riassunto in una formula:

$$\frac{5}{13} = \frac{1}{3} \times \frac{15}{13} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{2}{13}\right) = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{7} \times \frac{14}{13}\right) =$$

$$= \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{1}{7} \times \left(1 + \frac{1}{13}\right)\right)$$

da cui si deduce per la frazione 5/13 l'espressione seguente:

$$\frac{5}{13} = \frac{1 + \frac{1 + \frac{1}{13}}{7}}{3}$$

La nostra fonte principale di informazioni sul modo utilizzato dagli Egizi per fare questo tipo di calcoli è un famoso manoscritto scoperto nel 1855, e noto come «papiro Rhind» dal nome di Henry Rhind, un avvocato che lo acquistò tre anni dopo la sua scoperta. Scritto verso il 1650 a. C. da uno scriba di nome Ahmes, il papiro contiene un gran numero di tecniche di calcolo applicate a vari soggetti. Sulle frazioni continue ascendenti, in realtà, Ahmes non dà un algoritmo preciso come quello che abbiamo illustrato qui sopra. Il suo modo di procedere, che per ragioni legate alla comodità dei calcoli era un po' più limitato, non portava sempre a ciò che corrisponde a uno sviluppo in frazione continua ascendente. Ma non saremmo eccessivamente indulgenti se dicessimo che non ne era molto lontano.

Una storia in sospeso

A ogni numero x, dunque, si può associare una successione di numeri interi n, n', n'' ecc., tale da poter esprimere x nel modo che abbiamo visto. Tali numeri sono i suoi «quozienti parziali ascendenti», che consentono di scrivere x nella forma di una frazione continua ascendente (i quozienti parziali di 5/13, ad esempio, sono 3, 7 e 13).

Dopo le primizie offerte dal papiro Rhind, ben più antiche ed esplicite dell'antiferesi di Euclide da cui sono nate le frazioni continue, nel XIII secolo è Fibonacci a interessarsi a rappresentazioni del genere, ma è solo con Bombelli, tre secoli dopo, che le frazioni continue ordinarie vengono prese in considerazione dai matematici. Malgrado la loro anteriorità storica, le frazioni continue ascendenti sono state studiate molto meno di quelle ordinarie, soprattutto a causa del fatto che, in generale, i quozienti parziali ascendenti sono più complicati da esprimere di quelli «ordinari», come si vede nel caso della radice quadrata di 2. Resta il fatto, comunque, che questa rappresentazione fornisce una successione di numeri razionali che tende a $\sqrt{2}$ molto più rapidamente della successione delle ridotte data dalle frazioni continue.

20.

Uno sguardo simbolico

Fin qui, abbiamo visto due modi per affrontare la questione dell'approssimazione della radice quadrata di 2 attraverso le frazioni. Il primo è quello del calcolo più preciso possibile; il metodo di Newton (magari con qualche perfezionamento) ne è uno degli esempi migliori. Il secondo, scaturito dalle necessità dei fabbricanti di orologi, impone un compromesso tra la precisione dell'approssimazione e le dimensioni della frazione: da questo punto di vista, un'approssimazione di $\sqrt{2}$ del tipo p/q è ottimale quando non c'è un'altra frazione che sia più vicina a $\sqrt{2}$ e abbia un denominatore minore di q; in tal caso il metodo vincente è quello di Stern-Brocot (vedi cap. 18). Per approssimare i numeri con le frazioni esiste anche una «terza via», che presenteremo traendo spunto da un problema che esiste da migliaia di anni: la definizione di un calendario preciso.

Il problema del calendario

In termini matematici, definire un calendario significa trovare un'approssimazione soddisfacente della durata, espressa in giorni, dell'anno terrestre. Per ragioni di natura astronomica che non staremo a spiegare, l'anno può essere definito in modi differenti, cui corrispondono durate differenti. A noi interessa la definizione che si basa sulla ciclicità delle stagioni, il cosiddetto «anno tropico», che dura circa 365,24219878... giorni. Trattandosi di un numero non intero, lo si approssima facendo ricorso alle frazioni: il calen-

dario noto come giuliano, in omaggio a Giulio Cesare che lo importò dall'Egitto, consiste nel prendere 365 + 1/4 come durata legale dell'anno (espressa in giorni). In pratica, un anno giuliano ordinario è fatto di 365 giorni; un anno su quattro, poi, ne ha 366, ed è detto bisestile. In media, quindi, l'anno è composto da 365 giorni e un quarto, cioè 365,25.

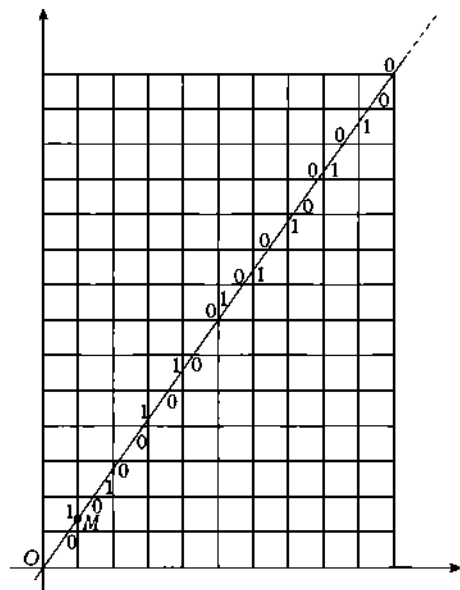
L'approssimazione giuliana, utilizzata per migliaia di anni, ha due qualità, la precisione e la semplicità d'uso. Alla fine del XVI secolo, l'accumularsi delle differenze tra l'anno legale del mondo cristiano e l'anno astronomico aveva portato a uno sfasamento di una decina di giorni, che in fondo non erano gran cosa rispetto ai diciassette secoli in cui si era utilizzato quel calendario. Il papa dell'epoca, Gregorio XIII, decise però di intraprendere una riforma, che entrò in vigore nel 1582 e che mirava a riportare la data della Pasqua in un periodo dell'anno più corretto (la riforma, tra l'altro, aveva anche il valore simbolico di un gesto di autorità in un periodo un po' agitato). Da un punto di vista matematico, la questione era la seguente: stimare con maggior precisione la durata dell'anno astronomico per arrivare a un calendario che si mantenesse ragionevolmente semplice. Si trattava di trovare una frazione p/q che approssimasse il valore della grandezza x (la durata dell'anno).

Ricerca di un compromesso tra precisione e semplicità... tutto questo ricorda molto i problemi legati alla fabbricazione degli orologi, che avevano portato al metodo di Brocot per la ricerca delle migliori approssimazioni razionali (vedi cap. 18). I termini del nuovo problema, però, sono leggermente differenti, perché la nostra idea di «semplice» non è più la stessa. Per Brocot, una frazione p/q è tanto più semplice quanto è piccolo il suo denominatore (o il suo numeratore, che è lo stesso). Certo, per definire un calendario è preferibile scegliere una frazione con un denominatore piccolo, ma ci vuole di più: bisogna anche che il denominatore in questione sia «umanamente comodo». Ora, applicando il metodo di Brocot all'anno astronomico, si arriva ad approssimazioni come 7/29, 23/95, o addirittura 31/128. Il difetto principale salta agli occhi: se la riforma gregoriana avesse scelto quest'ultima frazione, ci troveremmo spesso in gran difficoltà a utilizzare il calendario corrispondente, con i suoi trentun anni bisestili da distribuire su centoventotto anni.

Sulla difficoltà di ciò che è semplice: le sequenze sturmiane

Che i denominatori di Brocot non siano abbastanza semplici per il nostro calendario è ormai chiaro; ma allora, che qualità deve avere un denominatore per andare bene? Come capita spesso con i problemi «umani», non esistono risposte completamente soddisfacenti. Non c'è dubbio, si potrebbe suggerire di prendere solo i denominatori che sono potenze di dieci, considerando cioè solo le approssimazioni decimali dell'anno. Giudicate un po' voi: con una precisione al centesimo, bisognerebbe definire due anni bisestili ogni dieci anni, e aggiungerne quattro supplementari ogni secolo. Sarebbe gestibile, ma la precisione raggiunta sarebbe a malapena migliore di quella dell'anno giuliano e del suo denominatore 4: quest'ultimo, pur non essendo una potenza di dieci, merita altrettanto, senza ombra di dubbio, l'appellativo «semplice».

Un modo per risolvere questo nuovo problema di approssimazione di un numero x attraverso delle frazioni è il seguente: dato un intero q, si determina il valore dell'intero p tale che, tra tutte le frazioni con denominatore q, la frazione p/q sia quella che si avvicina maggiormente a x; sarà poi chi fa i conti a scegliere tra tutte le frazioni così ottenute. Se il metodo di Stern-Brocot si interessa alle frazioni p/q che si avvicinano a x più di qualunque altra frazione con il denominatore *minore o uguale* a q (una frazione del genere esiste solo per alcuni valori di q), l'approccio di cui stiamo parlando adesso consiste nel cercare le frazioni p/q che si avvicinano a x più di qualunque altra frazione con denominatore *uguale* a q (e, stavolta, per tutti i valori di q). In pratica, dunque, si tratta di aggiungere alla lista di Stern-Brocot altre frazioni, che potranno distare da x più di quelle di Stern-Brocot ma che in alcuni casi avranno un numeratore e un denominatore più facili da maneggiare. La scelta di queste frazioni non è un compito strettamente matematico; è una questione di compromesso tra la precisione e la semplicità di utilizzo.

Il quadro teorico che permette di realizzare questo programma esiste, e ruota intorno al concetto di «rappresentazione sturmiana». Dato un numero a (positivo), dotiamo il piano di un sistema di coordinate, e disegniamo la griglia composta da tutti i punti per i quali almeno una delle coordinate è un numero intero. Prendiamo

La rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$: 01010010100101010010100... (il punto *M* ha ascissa 1 e ordinata $\sqrt{2}$).

il punto *M* di coordinate (1, *a*), e tracciamo la semiretta che parte dall'origine *O* del sistema di coordinate e passa per *M*. Percorriamola partendo da *O*, e ogni volta che questa incrocia una retta della nostra griglia indichiamo con 0 l'intersezione con le linee orizzontali e con 1 quelle con le linee verticali. Otteniamo così una successione di 0 e di 1: è la «rappresentazione sturmiana» di *a*. La figura precedente ci dà l'inizio della rappresentazione sturmiana della radice quadrata di 2.

Per un computer, il percorso della retta che passa per i punti *O* e *M* non è altro che la sequenza di «pixel» (gli elementi che formano la griglia di mappatura dello schermo) a contatto con la retta stessa: partendo da *O* e dirigendosi verso *M*, la strada da seguire per accendere i pixel si dirige alternativamente a destra e verso l'alto, secondo la regola indicata dalla rappresentazione sturmiana del numero *a* (1: a destra, 0: verso l'alto).

È facile capire che ogni numero ha una sua rappresentazione sturmiana distinta: si tratta, dunque, di un sistema di rappresentazio-

ne dei numeri alternativo a quello decimale o alla rappresentazione in frazione continua.

Chiediamoci ora qual è la frazione con denominatore uguale a 13 che si avvicina di più alla radice quadrata di 2. Nella rappresentazione geometrica del grafico precedente, $\sqrt{2}$ corrisponde alla «pendenza» della semiretta $[OM)$, ovvero al rapporto tra la variazione delle ordinate e quello delle ascisse. In pratica: quando ci si sposta sulla retta avanzando di un'unità lungo l'asse delle ascisse, l'ordinata aumenta di $\sqrt{2}$; più generalmente, quando l'ascissa aumenta di t l'ordinata aumenta di $t \cdot \sqrt{2}$. In quest'ottica, dunque, cercare di approssimare $\sqrt{2}$ con una frazione di denominatore q equivale a cercare, tra le semirette passanti per O, quella più vicina a $[OM)$ e la cui pendenza corrisponda a una frazione con denominatore pari a q. In altri termini ancora, si tratta di trovare il valore dell'intero p tale che il punto N di coordinate (q, p) sia il più vicino possibile alla semiretta $[OM)$. La rappresentazione sturmiana di a ci aiuta a trovare il punto in questione: quest'ultimo, infatti, può essere raggiunto partendo da O e spostandosi q volte verso destra e p volte verso l'alto. Dato q, dunque, per trovare p basta individuare nella rappresentazione sturmiana di a il punto in cui viene scritto il q-esimo 1 (ricordiamo che a ogni 1 corrisponde uno spostamento verso destra, cioè lungo l'asse delle ascisse): se si indica con n il numero di zeri tra l'inizio della rappresentazione e il momento in cui si arriva al q-esimo 1, i casi possibili sono due: o $p = n$ (miglior approssimazione per difetto), o $p = n + 1$ (miglior approssimazione per eccesso). Volendo conoscere la frazione con denominatore 13 che meglio approssima $\sqrt{2}$, ad esempio, si contano gli 1 presenti nella rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$, e ci si ferma al tredicesimo. Il numero di 0 contenuti tra l'inizio della rappresentazione e il tredicesimo 1 dà $n = 18$: la miglior frazione per difetto, perciò, è 18/13, mentre la migliore per eccesso è 19/13 (un semplice calcolo, poi, ci mostra che la più vicina a $\sqrt{2}$ è la prima delle due). Osserviamo, ad esempio, che per $q = 12$ si trova $p = 17$, cioè la frazione 17/12, che abbiamo già incontrato: si tratta di uno degli approssimanti di Farey di $\sqrt{2}$, il che non dovrebbe sorprenderci, dato che tali approssimanti non sono altro che le migliori approssimazioni razionali di $\sqrt{2}$.

Dinamica simbolica

Il vantaggio della rappresentazione sturmiana sugli altri due sistemi di rappresentazione, quello decimale e quello delle frazioni continue, è di fornire, per qualsiasi denominatore q, la frazione p/q che più si avvicina al numero che ci interessa. Ma allora, dato un numero x, come fare per determinarne la rappresentazione sturmiana? Il grafico precedente costituisce senza dubbio un modo pratico per determinarne le prime cifre, ma è chiaro che con quest'unica tecnica non si può fare molta strada.

Con che regola si susseguono gli 1 e gli 0 nella rappresentazione sturmiana di un numero dato? Si può dimostrare (ne lasciamo il compito al lettore) che la rappresentazione sturmiana del numero a è periodica (cioè ripete all'infinito una sequenza di base) se, e solo se, a è razionale. Se a è uguale alla radice quadrata di 2, dunque, la rappresentazione non è periodica, ma presenta ugualmente alcune proprietà davvero notevoli, che ne fanno una delle rappresentazioni più facili da scrivere, persino rispetto a quelle dei numeri razionali.

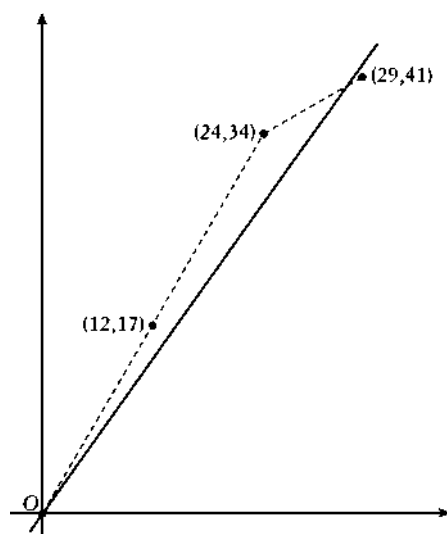
Esiste una tecnica generale che consente di ottenere la rappresentazione sturmiana di un numero qualsiasi. Descriverne i dettagli e dimostrarne la validità sarebbe un po' lungo, e dunque ci limiteremo a mettere in evidenza due proprietà tipiche della rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$, ognuna delle quali illustra un aspetto specifico di un ramo della matematica noto come «dinamica simbolica».

La dinamica simbolica consiste nella generazione e nello studio di successioni infinite di «lettere» ordinate secondo regole predefinite, e nell'analisi delle proprietà delle «parole» così formate. Le «lettere» sono un insieme di segni di un «alfabeto» predefinito: un alfabeto usato comunemente nella dinamica simbolica è quello composto esattamente da due lettere, indicate a volte con a e b e a volte con 0 e 1. La successione di 0 e 1 dell'espressione binaria della radice quadrata di 2 è un esempio di parola, che la dinamica simbolica non vede come la rappresentazione di un valore numerico, ma come una semplice sequenza di segni da studiare in quanto interessante di per sé. In pratica, l'ignoranza per così dire totale di qualsiasi regola di formazione capace di spiegare la successione di 0 e 1 nell'espressione binaria di $\sqrt{2}$ si traduce nel fatto che la dinami-

ca simbolica è attualmente incapace di cogliere il senso di quella parola. In compenso, però, è in grado di dire molte cose sulla rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$.

Una costruzione per blocchi

A priori, un occhio non allenato non vede alcuna regolarità nella rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$. Tutt'al più si può constatare qualche regola empirica, come il fatto che non ci sono mai due 1 di fila, e neanche tre zeri di fila. Esiste tuttavia un modo semplicissimo di costruire la sequenza di 0 e di 1 che corrisponde alla rappresentazione di $\sqrt{2}$; anzi, ne esistono diversi. Il primo è quello dei «blocchi». Si parte da un primo blocco elementare uguale a 0, e da un secondo blocco definito come 01, e si costruiscono i blocchi successivi nel modo seguente: ogni nuovo blocco si ottiene concatenando due copie del precedente, e aggiungendo al risultato una copia del blocco ancora precedente (in termini matematici: il blocco B_n è dato da $B_{n-1}B_{n-1}B_{n-2}$). Così facendo si ottiene, nell'ordine:

0
01
(01)(01)(0) → 01010
(01010)(01010)(01) → 010100101001
(010100101001)(010100101001)(01010) →
→ 01010010100101010010100101010

In questo modo si ritrova la rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$. Da dove deriva questa bizzarra proprietà? Per scoprirlo, scriviamo anzitutto il rapporto tra il numero di 0 e il numero di 1 nelle parole precedenti. Un semplice conteggio ci dà questa sequenza di rapporti: 1/0, 1/1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/29... Nel capitolo 18 abbiamo visto che si tratta delle ridotte di $\sqrt{2}$; abbiamo anche visto che questi rapporti sono «migliori approssimazioni razionali», cioè che, ad esempio, 17/12 è la frazione che si avvicina di più a $\sqrt{2}$ tra tutte quelle con denominatore minore o uguale a 12.

Dato che 17/12 è una buona approssimazione di $\sqrt{2}$, la semiretta uscente dall'origine O con una pendenza pari a 17/12 è vicina

alla semiretta uscente da *O* con una pendenza pari a $\sqrt{2}$. Ci si può aspettare, dunque (la cosa richiederebbe una dimostrazione dettagliata, che tralasciamo), che le sequenze sturmiane dedotte dalle due semirette comincino nello stesso modo.

Più precisamente, prendiamo il punto di ascissa 12 e ordinata 17, che ovviamente si trova sulla semiretta uscente da *O* e avente una pendenza uguale a 17/12. Si può verificare che, essendo 17/12 la miglior approssimazione di $\sqrt{2}$ tra tutte le frazioni con denominatore minore o uguale a 29, la sequenza di 0 e 1 ottenuta dalle intersezioni con la griglia che suddivide il piano è la stessa per le due porzioni di semiretta delimitate dai lati del rettangolo definito dal punto di coordinate (12, 17).

Consideriamo ora il punto di coordinate (24, 34), ottenuto raddoppiando le coordinate del punto (12, 17), e poi il punto (29, 41), ottenuto aggiungendo rispettivamente 5 e 7 all'ascissa e all'ordinata di (24, 34).

I numeri 5 e 7 non sono stati scelti a caso: si tratta, rispettivamente, del denominatore e del numeratore di 7/5, la ridotta che precede 17/12. Da quanto abbiamo visto nel capitolo 18, raddoppiando il numeratore di una ridotta e aggiungendo al risultato il numera-

tore della ridotta precedente, si ottiene il numeratore di quella successiva. Stessa cosa per i denominatori. La figura precedente, dunque, non è altro che una versione geometrica del fenomeno. Dato che 41/29 è la ridotta di $\sqrt{2}$ che segue 17/12, collegando il punto di coordinate (29, 41) all'origine *O* si può ottenere una semiretta ancora più vicina alla semiretta con pendenza $\sqrt{2}$. E si può andare avanti così finché si vuole.

Come si traduce tutto ciò in termini di rappresentazione sturmiana? Si verifica facilmente che la successione di 0 e 1 che si ottiene andando da *O* a (12, 17) è la stessa di quella ottenuta andando da (12, 17) a (24, 34). Analogamente, nell'andare da (24, 34) a (29, 41) si trova la stessa sequenza di 0 e 1 che si trova andando da *O* a (5, 7). Di conseguenza, se indichiamo con *B* il blocco di 0 e 1 ottenuti tra *O* e (5, 7), e con *B'* quello tra *O* e (12, 17), allora il blocco di 0 e 1 tra *O* e (29, 41) non è altro che la concatenazione di *B'*, *B'* e *B*: ritroviamo così la costruzione per blocchi che abbiamo definito poco fa. L'inizio della costruzione, vale a dire i primi due blocchi (0 e 01) a partire dai quali si costruiscono i successivi, non sono altro che i blocchi corrispondenti alle prime due approssimazioni della retta con pendenza $\sqrt{2}$, ottenute dai punti di coordinate (1, 1) (che dà 0) e (1, 2) (che dà 01).

A voler essere rigorosi, quanto si è appena detto non è proprio sufficiente, in particolare perché bisognerebbe giustificare il fatto che la concatenazione va fatta effettivamente nell'ordine indicato (*B'B'B*) e non in un altro, ad esempio *B'BB'*, ugualmente suscettibile di un'interpretazione geometrica avente a che fare con i numeratori e i denominatori delle ridotte. Senza entrare in tali dettagli, limitiamoci a osservare che il problema si risolve dimostrando che il punto di coordinate (24, 34) dà origine a una semiretta più vicina a quella con pendenza $\sqrt{2}$ rispetto alla semiretta definita dal punto (12 + 5, 17 + 7) ottenuto attraverso la concatenazione *B'BB'*.

Lettere che diventano parole

Ecco un altro modo per ricavare la rappresentazione sturmiana della radice quadrata di 2. Il nostro punto di partenza è la parola formata unicamente dalla lettera 0, scritta una volta sola. Le tap-

pe successive consistono nel sostituire ogni 0 con il blocco di lettere 01, e ogni 1 con il blocco 010: parliamo dunque di «sostituzione». Vediamo in dettaglio cosa succede all'inizio. Anzitutto, lo 0 iniziale si trasforma in 01. Dopo di che, lo 0 di 01 si trasforma in un blocco 01, mentre l'1 diventa 010. Il blocco 01, perciò, si è trasformato nella concatenazione di 01 e 010, cioè 01010. Ripetendo il procedimento si ottengono le parole seguenti, ognuna delle quali rappresenta l'inizio della rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$:

0
01
01010
010100101001
01010010100101010010100101010
0101001010010101001010010101001010010100101010010100101010010100101001
...

Da dove nasce questa nuova coincidenza? Il fatto di essere partiti da 0 e di aver deciso di trasformare gli 0 in 01 spiega le prime due linee della lista precedente: il nostro criterio di sostituzione è stato definito in modo tale che le due linee corrispondessero a quelle della costruzione per blocchi che abbiamo visto prima. È evidente, poi, che per passare da 01 a 01010, l'1 di 01 deve essere trasformato in 010. Risultato: esiste un'unica sostituzione capace di riprodurre le prime tre linee, ed è quella che cambia gli 0 in 01 e gli 1 in 010.

Resta da spiegare come mai anche le linee successive riproducono l'inizio della rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$. Per capirlo, analizziamo ciò che succede quando la sostituzione ci fa passare da 01010 a 010100101001. La parola 01010 è la concatenazione di 01, 01 e 0: la sostituzione, dunque, trasforma 01010 in una parola che è il risultato della concatenazione di 01010 (sostituzione applicata a 01), ancora 01010 (*idem*) e, infine, 01 (sostituzione applicata a 0). La parola così ottenuta, 010100101001, può quindi essere vista come il risultato della concatenazione di 01010 preso due volte e di 01. Se indichiamo rispettivamente con B e B' le parole 01 e 01010, la nostra nuova parola corrisponde a $B'B'B$: siamo ritornati alla regola dei blocchi studiata poco fa. Lo stesso feno-

meno si riproduce a ogni tappa successiva: la regola dei blocchi dà origine alle stesse parole generate dalla sostituzione, che si dimostra un modo alternativo per ottenere la rappresentazione sturmiana della radice quadrata di 2.

Tra le varie proprietà interessanti di quest'ultima, ricordiamo questa: analizzando il numero di «parole di lunghezza n» che vi compaiono (cioè le successioni di n lettere identificabili all'interno della rappresentazione) si nota che per $n = 1$ tale numero vale 2 (la rappresentazione è formata da 0 e da 1), per $n = 2$ vale 3 (troviamo 00, 01 e 10, ma mai 11), per $n = 3$ vale 4 (le parole di lunghezza uguale a 3 che vi compaiono sono 010, 101, 100 e 001); in maniera più generale, si può dimostrare che nella rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$ ci sono esattamente $n + 1$ parole di lunghezza n. Una successione infinita di 0 e di 1 è detta «sturmiana» quando gode di questa proprietà. Le sequenze sturmiane prendono il nome dal matematico svizzero Jacques Sturm per una ragione tecnica che esula dagli argomenti che stiamo trattando, ma in realtà sono state introdotte da Marston Morse e G. Hedlund negli anni quaranta. Si può dimostrare che le sequenze sturmiane godono anche di un'altra proprietà (che quindi vale, in particolare, anche per la rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$): prese due parole di taglia uguale in due punti qualsiasi della sequenza, e indicando rispettivamente con u e v il numero di 1 nella prima e nella seconda, $u - v$ può valere 1, 0 o -1, e ciò per qualunque coppia di parole.

Una base esotica Il concetto di base di numerazione si fonda sulla scelta di un numero b le cui potenze successive formano una «scala» a partire dalla quale si rappresentano i numeri. Per sapere come si scrive il numero x in base 10, ad esempio, si cerca la più grande potenza di 10 inferiore a quel numero. Immaginiamo che x sia maggiore di cento, ma minore di mille: in tal caso metteremo in x il massimo numero possibile di centinaia. Dopo di che, si mette nel resto il massimo numero possibile di decine, e, per finire, il massimo numero possibile di unità in ciò che resta: se alla fine abbiamo messo 6 centinaia, 3 decine e 4 unità, il numero x si scrive 634.
Tutto ciò non vale solo per qualsiasi base di numerazione, ma anche per una scala di numeri che non sia necessariamente determinata

dalla successione delle potenze di un numero iniziale. Per indicare le scale di numeri che non sono fissate dalle potenze successive di un intero si parla talvolta di «basi esotiche».
Invece di prendere come scala la successione 1, 10, 100, 1000, dunque, prendiamo la successione 1, 2, 5, 12, 29, 70 ecc., formata dai denominatori delle ridotte di $\sqrt{2}$. Il procedimento applicato poco fa alla base dieci funziona esattamente nello stesso modo anche per questa nuova scala di numerazione, che costituisce una *rappresentazione di Ostrowski* (a ogni numero irrazionale corrisponde una successione che dà origine, come quella di $\sqrt{2}$, a una scala di numerazione). Per esprimere un numero x in un sistema del genere, si cerca il massimo numero della sequenza 1, 2, 5, 12, 29... che sia minore di x: supponiamo che si tratti di 12. Calcoliamo quante volte è contenuto il 12 in x, dopo di che mettiamo 5 nel resto quante più volte è possibile, e così via. Se alla fine abbiamo messo una volta 12, due volte 5 e una volta 1, il numero ottenuto si scrive così: 1201 (ovvero: $(1 \times 12) + (2 \times 5) + (0 \times 2) + (1 \times 1)$, che corrisponde a 23 in notazione decimale). Il lettore potrà verificare che, in questa rappresentazione, i numeri da 0 a 10 si scrivono così:

0 1 10 11 20 100 101 110 111 120 200.

La proprietà «$p'' = 2p' + p$ (vedi cap. 18) della scala di numerazione in questione fa sì che un numero scritto secondo tale sistema contiene esclusivamente degli 0, degli 1 e dei 2, e che un 2 non è mai seguito da un 1: ad esempio, se si finisse per prendere due volte 12 e una volta 5, vorrebbe dire che avremmo dovuto cominciare subito da 29. La sequenza dei numeri interi scritta nella forma precedente possiede una proprietà decisamente interessante. Scriviamo la lista delle ultime cifre di tale sequenza: otteniamo 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0... Ecco comparire di nuovo la rappresentazione sturmiana della radice quadrata di 2! Non abbiamo abbastanza spazio per darne una dimostrazione, ma il lettore potrà cercare di farlo per conto proprio partendo dalla descrizione a blocchi della rappresentazione sturmiana di $\sqrt{2}$.

Per concludere, ritorniamo al problema che ci ha consentito di introdurre questo capitolo: l'elaborazione di un calendario. La soluzione che ha finito per essere adottata nel XVI secolo, naturalmen-

te senza ricorrere alle rappresentazioni sturmiane, che non erano ancora state inventate, consiste nell'approssimare la durata dell'anno tropico espresso in giorni mediante il valore $365 + 1/4 - 3/400$: è il cosiddetto «anno gregoriano» (in onore di papa Gregorio XII, ispiratore della riforma), in uso ancora oggi. In pratica, il calendario è fatto così: si inserisce sempre un anno bisestile ogni quattro, ma si tolgono tre anni bisestili tutti i quattrocento anni. Gli anni bisestili, perciò, sono quelli divisibili per quattro, con l'eccezione di quelli divisibili per 100 ma non per 400: così, 1800, 1900 e 2100 non sono bisestili, mentre lo sono l'anno 2000, il 2400 e il 2800.

Questa approssimazione, molto pratica, ha segnato la fine del calendario giuliano, a favore di una stima ottenuta come somma di due frazioni, in cui il denominatore della seconda è multiplo di quello della prima: non siamo molto lontani, dunque, dalle frazioni continue ascendenti che compaiono, almeno in parte, nel papiro Rhind, come si è visto nel capitolo precedente. Certo, il calcolo egizio della lunghezza dell'anno ha ceduto il posto a un calcolo diverso, che comunque è rimasto legato a un'espressione la cui origine risale anch'essa all'antico Egitto.

Appendice alla parte quinta

Un miracolo sulla calcolatrice

Il «miracolo» di cui stiamo per parlare fornisce uno spunto interessante per riflettere su alcune proprietà del calcolo numerico a partire dalle idee sviluppate nel capitolo 17 sulle frazioni continue, e riprendendo i problemi di arrotondamento e di approssimazione evocati nel corso del capitolo 13.

Gli errori della calcolatrice

Partiamo dal seguente problema: dato un numero x, come trovare il suo sviluppo in frazione continua servendosi di una calcolatrice? Grazie all'algoritmo di Euclide si tratta di un compito alla portata anche di macchine molto semplici. Ad esempio, se partiamo dal numero 28,4, togliamo anzitutto la parte intera (28), poi calcoliamo il reciproco del resto (cioè 1/0,4), ottenendo 2,5. A questo punto sottraiamo nuovamente la parte intera, rimanendo con 0,5, il cui reciproco vale 2: il risultato finale è $28{,}4 = 28 + 1/(2 + 1/2)$. Con una macchina più sofisticata (una di quelle utilizzate nei licei scientifici, ad esempio) è possibile programmare l'algoritmo di Euclide così da non dover inserire i dati manualmente a ogni iterazione. Ecco un esempio di un programma del genere:

1. Far digitare all'utente il valore x di cui si vuole conoscere lo sviluppo in frazione continua;
2. Determinare la parte intera, n, di x, e visualizzarla;
3. Se x è uguale alla propria parte intera (cioè se x è intero), interrompere il programma; altrimenti, sostituire x con $1/(x - n)$;
4. Tornare al passo 2.

(NB: per evitare che il programma si metta a girare all'infinito, conviene definire un contatore che limiti il numero massimo di volte in cui si ritorna al passo 2).

Se l'utente inserisce il valore 28,4, il programma visualizza nell'ordine i valori 28, 2 e 2, per poi fermarsi. Se come x si sceglie $\sqrt{2}$, la sequenza dei numeri generati è 1, 2, 2, 2, 2 ecc., cioè proprio i quozienti parziali dati dalla teoria.

Proviamo un'altra volta il programma, ma questa volta con il valore $\sqrt{3}$. Ecco la sequenza che compare sullo schermo:

1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,
1,4,1,4,2,2,5,1,2,3,21,1,6...

Problema: a parte i primi elementi, la sequenza non corrisponde a quella dei quozienti parziali di $\sqrt{3}$, che presenta un'alternanza ininterrotta di 1 e di 2. Con $\sqrt{5}$ si osserva la stessa discrepanza: i quozienti parziali dati dalla calcolatrice sono 2,4,4,4,4,4,4,4,4, 4,4,3,1,1,1,26,1,4,2,8,1,10..., mentre sappiamo che dopo il primo 2 dovrebbero esserci solo dei 4. La stessa discrepanza si riproduce invariabilmente con altri numeri. Che cosa sta succedendo?

Nell'effettuare un'operazione, la calcolatrice non lavora su valori esatti (a meno che non si stia utilizzando un programma di calcolo formale, come abbiamo visto nel capitolo 4), ma su approssimazioni decimali. Ad esempio, quando scriviamo $\sqrt{3}$ la macchina prende il numero 1,732050808, che non è esattamente uguale a $\sqrt{3}$. Indubbiamente la vicinanza dei due valori fa sì che all'inizio della frazione continua si ottengano ancora i quozienti parziali corretti, ma a lungo andare è normale riscontrare una differenza, tanto più che, ogni volta che la macchina effettua il calcolo di $1/(x-n)$, può dover fare una nuova approssimazione. Il caso del numero 28,4, perciò, è estremamente particolare, nella misura in cui non solo i calcoli successivi implicano a ogni passaggio valori esclusivamente decimali (cioè con un numero finito di cifre dopo la virgola), ma che, in più, la quantità di decimali necessari per scrivere ogni numero che compare nel calcolo è talmente piccola che la macchina non deve mai fare ricorso ad arrotondamenti.

Occupiamoci ora del caso di $\sqrt{5}$. Il calcolo esatto dei suoi quozienti parziali, realizzabile attraverso un programma di logica formale, può essere svolto nel modo seguente, servendosi dell'ugua-

glianza $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ (è lo stesso metodo algebrico di Bombelli che abbiamo visto nel capitolo 17):

$$\sqrt{5}=2+(\sqrt{5}-2)=2+\frac{(\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)}{\sqrt{5}+2}=2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}=$$

$$=2+\frac{1}{2+\left(2+\frac{1}{2+\sqrt{5}}\right)}=\cdots$$

da cui si ricava lo sviluppo in frazione continua che stavamo cercando:

$$\sqrt{5}=[2,4,4,4,4,\ldots]$$

La cosa notevole del calcolo precedente è che, a ogni tappa, il resto è uguale a $1/(2+\sqrt{5})$. Sulla calcolatrice, invece, gli errori di arrotondamento si accumulano con i calcoli, e il valore del resto cambia poco a poco. Lo scarto, inizialmente invisibile in quanto nascosto tra i decimali nascosti (si veda l'inserto), si propaga progressivamente: al termine dell'undicesima tappa è così grande che il calcolo della parte intera non dà più 4. Di lì in poi non c'è alcun rapporto tra i quozienti parziali forniti dalla calcolatrice e quelli indicati dalla teoria.

I decimali nascosti, in una calcolatrice, sono quei decimali che non vengono visualizzati sullo schermo per mancanza di spazio, ma che la macchina è comunque in grado di trattare. Di solito, su una calcolatrice scientifica vengono visualizzate dieci cifre, anche se i calcoli sono effettuati con uno o più decimali supplementari. È per questo che quando chiediamo alla calcolatrice di calcolare la radice quadrata di 2, lo schermo propone 1,414213562 mentre la macchina, in realtà, lavora con un valore più preciso, come 1,4142135623731. Per rendere visibili i decimali nascosti possiamo osservare che i decimali di $\sqrt{2}$ e $10000\sqrt{2}$ sono gli stessi (l'unica differenza tra i due è il posto occupato dalla virgola). Se dopo aver calcolato $10000\sqrt{2}$ si sottrae al risultato il valore 14140, facciamo spazio per poter visualizzare altri decimali, dato che abbiamo fatto sparire le prime quattro cifre (1, 4, 1 e 4). E così, invece di 4,213562, che dovrebbe essere il valore visualizzato se $\sqrt{2}$ coincidesse con

1,414213562, il calcolo di $10000\sqrt{2} - 14140$ ci dà 4,2135623731: abbiamo reso visibili quattro nuovi decimali (3731) di $\sqrt{2}$. Ripetendo lo stesso procedimento con una moltiplicazione per 100000 seguita dalla sottrazione di 1414210 possiamo visualizzare un quinto decimale nascosto.
Per concludere, una precisazione: su certi modelli di calcolatrice, se non si fa calcolare alla macchina il valore $10000\sqrt{2} - 14140$ «in un colpo solo», i decimali nascosti rischiano di non comparire. Se ci si accontenta di calcolare $\sqrt{2}$ per poi moltiplicare per 10000 il valore ottenuto e sottrarre 14140 al risultato, non è escluso che la macchina «dimentichi» per strada i decimali nascosti. Un'analoga precauzione va adottata nel caso del calcolo effettuato al passo n. 3 del programma descritto in precedenza.

Il miracolo di $\sqrt{2}$

Tutto ciò spiega perfettamente il comportamento della calcolatrice per $\sqrt{3}$ o per $\sqrt{5}$, o anche per un numero razionale come 1,213 (il reciproco di 1,213 non è un numero decimale, e questo porta a degli arrotondamenti, a causa dei quali il programma sembra destinato a non fermarsi mai, nonostante si abbia a che fare con un numero razionale), ma porta anche a un problema nuovo. Come è possibile, infatti, che nel caso di $\sqrt{2}$ – dove gli arrotondamenti a ogni passo del programma sono inevitabili – i quozienti parziali proposti dalla calcolatrice corrispondono perfettamente a quelli previsti dalla teoria? Perché possiamo far girare il programma tutto il tempo che vogliamo, ma la macchina ci dà sempre i quozienti parziali esatti: un 1, e poi un'infinità di 2.

A quanto pare, siamo di fronte a un problema decisamente inusuale: non si tratta di capire perché la calcolatrice fallisca, ma, al contrario, come sia possibile che se la cavi così bene!

La spiegazione sta in una proprietà particolare delle prime cifre decimali di $\sqrt{2}$. Analizziamo in dettaglio cosa succede durante l'esecuzione dell'algoritmo: al primo passo del programma, l'utente inserisce come valore di x la radice quadrata di 2, che la macchina interpreta come 1,4142135623731. Nel passaggio successivo si

visualizza il valore 1 (la parte intera di $x = 1,4142135623731$). Dato che $1,4142135623731 - 1 = 0,4142135623731$, nel passo successivo si effettua il calcolo di $1/(1,4142135623731 - 1)$, che vale 2,41421356237306191... Nel suo calcolo approssimato, la macchina arrotonda al valore a 14 cifre più vicino, ovvero 2,4142135623731. Ecco il miracolo: a parte la cifra delle unità, i decimali di quest'ultimo numero coincidono perfettamente con quelli dell'approssimazione di $\sqrt{2}$ utilizzata dalla macchina. Grazie a questa felice coincidenza numerica il nostro programma, che funziona operando su valori approssimati, può dare comunque un risultato corretto.

Non c'è dubbio che questo genere di coincidenze può aver luogo anche con altri numeri. Il principio stesso del calcolo effettuato su valori approssimati fa sì che, dopo un periodo di tempo più o meno lungo, la macchina finisca inevitabilmente per entrare in un ciclo chiuso (a meno che il numero non sia razionale, come nel caso di 28,4, nel qual caso è possibile che l'algoritmo si arresti: non si tratta affatto della norma, però, come abbiamo potuto vedere nel caso di 1,213). Per quanto possa essere grande, infatti, il numero di valori che la macchina è in grado di trattare è finito, e l'algoritmo che le facciamo eseguire fa dipendere ogni nuovo quoziente parziale solo dall'ultimo numero calcolato: si arriva a un punto, quindi, in cui si ritrova un numero già incontrato, e l'algoritmo entra in un ciclo chiuso dal quale non può più uscire. A parte qualche numero razionale, i casi in cui l'algoritmo dà un risultato esatto vanno ricercati piuttosto tra i numeri quadratici, dato che, per il teorema di Lagrange (vedi cap. 17) questi sono gli unici ad avere quozienti parziali periodici.

Un ultimo punto: bisogna anche considerare il fatto che non tutte le calcolatrici hanno lo stesso numero di decimali nascosti. Per i calcoli precedenti ci siamo serviti del modello TI-83 Plus della Texas Instruments, che lavora con 4 decimali nascosti. Un modello più vecchio, come la *fx-8500G* della Casio, ne ha solo 3. A seconda del modello utilizzato la coincidenza numerica non si manifesta per gli stessi valori: con la TI-83 Plus, applicando il programma a $\sqrt{11}$ si hanno sempre i quozienti parziali corretti, il che non succede con la *fx-8500G* (con la quale solo i primi dieci quozienti parziali di $\sqrt{11}$ sono giusti). Non si creda, però, che all'aumentare della quantità

di decimali nascosti aumentino anche le probabilità di osservare coincidenze dovute agli arrotondamenti; queste, infatti, non sono dovute a una maggior precisione nei calcoli, ma piuttosto a una coincidenza fortuita nelle approssimazioni. È anche vero, comunque, che più la macchina è precisa, più tempo ci mette a manifestarsi un'eventuale discrepanza tra la teoria e il calcolo.

Per quanto riguarda $\sqrt{2}$, la coincidenza numerica è decisamente tenace, poiché si manifesta sia su una calcolatrice a 3 decimali nascosti sia su una a 4. Abbiamo provato fino a $\sqrt{30}$, ma non abbiamo trovato altri casi di radici quadrate che godano di questa proprietà; lasciamo ai lettori interessati il compito di capire cosa succede con altri numeri quadratici.

Parte sesta

In cima alla piramide dei numeri

«La radice quadrata è la mia preferita».
Boris Vian, *Racine carrée*.

Gli strumenti matematici che abbiamo messo a punto nella quinta parte, in particolare il formalismo delle frazioni continue, trovano un terreno fertile nella teoria della «ripartizione uniforme delle successioni di numeri compresi tra 0 e 1». I capitoli 21 e 22 (indubbiamente i più difficili di tutto il libro) si propongono di passare in rassegna le idee fondamentali di una teoria che permette di dimostrare che, in un certo senso, la radice quadrata di 2 è il più «estremo» di tutti i numeri irrazionali. Altri punti di vista portano invece ad attribuire questo titolo al numero aureo, $(1 + \sqrt{5})/2$. L'esplorazione dei vari aspetti della «questione dell'irrazionale estremo» è un'occasione per interessarsi ai legami profondi tra questi due numeri. Tale sarà l'argomento dei capitoli 23 e 24 (una buona parte dei quali può essere affrontata senza aver prima letto i capitoli 21 e 22).

La conclusione cui si arriva è che, vista la difficoltà di dichiarare un «vincitore», la radice quadrata di 2 e il numero aureo meritano entrambi un posto in cima alla piramide dei numeri.

21.

Dei punti ben distribuiti

Il capitolo presenta i rudimenti della teoria della «ripartizione modulo 1», attualmente considerata di grande importanza nello studio dei numeri irrazionali come $\sqrt{2}$. È questa teoria a fornire oggi la base matematica più comunemente utilizzata per esplorare il concetto di numero normale (vedi cap. 16). Il capitolo successivo, che analizza il ruolo primario della radice quadrata di 2 in tale contesto, sfrutterà in maniera intensiva le nozioni presentate in questo capitolo.

Ritorno ai numeri normali

Nel capitolo 16, abbiamo definito «normali» tutti quei numeri nel cui sviluppo decimale la frequenza con cui appare una qualsiasi sequenza di cifre è la stessa che ci si aspetterebbe da un numero i cui decimali siano estratti a caso. Volendo esprimere in termini moderni il problema della ripartizione dei decimali di un numero come $\sqrt{2}$, si prende in considerazione la successione dei numeri $\sqrt{2}$, $10\sqrt{2}$, $100\sqrt{2}$, $1000\sqrt{2}$ ecc., o, più precisamente, la successione delle loro «parti frazionarie», ottenibili sostituendo con uno 0 le cifre a sinistra della virgola. Ad esempio, $1000\sqrt{2} = 1414{,}21356...$, e dunque la parte frazionaria di $1000\sqrt{2}$, che si indica con $\{1000\sqrt{2}\}$, è uguale a 0,21536... (il numero formato dalle cifre che *precedono* la virgola, come 1414 nel caso di $1000\sqrt{2}$, viene detto invece «parte intera»). Diciamo che la successione $10^n \cdot \sqrt{2}$ è presa «modulo 1». Ecco i primi termini di tale successione:

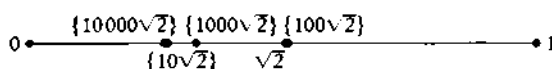
$$\{\sqrt{2}\} = 0{,}41421\ldots$$
$$\{10\sqrt{2}\} = 0{,}14213\ldots$$
$$\{100\sqrt{2}\} = 0{,}42135\ldots$$
$$\{1000\sqrt{2}\} = 0{,}21356\ldots$$
$$\{10\,000\sqrt{2}\} = 0{,}13562\ldots$$

Per ottenerla, in pratica, basta «cancellare» uno dopo l'altro i decimali di $\sqrt{2}$.

Adesso serviamoci dei punti di un segmento di lunghezza 1 per rappresentare i numeri ottenuti.

$\{10000\sqrt{2}\}$ $\{1000\sqrt{2}\}$ $\{100\sqrt{2}\}$

0 — 1

$\{10\sqrt{2}\}$ $\sqrt{2}$

Il problema di sapere se un numero come $\sqrt{2}$ è normale o no si riconduce a quello di sapere se la successione dei punti si ripartisce sul segmento in maniera «omogenea», vale a dire se ci sono zone più «popolate» a scapito di altre che vengono visitate con minor frequenza. Ad esempio, chiedersi se la cifra 5 compare in media una volta su 10 nella lista dei decimali di $\sqrt{2}$ equivale a chiedersi se, tra tutti i punti individuati progressivamente sul segmento, la proporzione di quelli compresi tra i punti di ascissa 0,5 e 0,6 è effettivamente di 1/10. Analogamente, voler sapere se la sequenza di cifre 123456 compare con la stessa frequenza con cui comparirebbe in un numero i cui decimali sono scelti a caso (cioè una volta su un milione) è come chiedersi se la proporzione dei punti che cadono tra le ascisse 0,123456 e 0,123457 è effettivamente di uno su un milione.

Quando per una successione di punti si trova che, qualunque sia l'intervallo di lunghezza *a* preso all'interno del segmento, la proporzione dei punti della successione contenuti in quell'intervallo è uguale ad *a* (facciamo qualche esempio: un punto su due, in media, si trova nell'intervallo [1/4, 3/4], due punti su cinque nell'intervallo [1/10, 1/2] ecc.), si dice che la successione è «uniformemente distribuita modulo 1». Il fatto di non aver ancora scoperto se $\sqrt{2}$ sia un numero normale, quindi, si traduce nel fatto che al momento non sappiamo se la successione $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$ è uniformemente distribuita modulo 1.

A priori, c'è una leggera differenza tra la questione della normalità di $\sqrt{2}$ e quella della ripartizione modulo 1 della successione $10^n \cdot \sqrt{2}$, nella misura in cui una si interessa esclusivamente alla frequenza con cui i punti cadono in intervalli limitati da due numeri decimali, mentre l'altra prende in considerazione tutti gli intervalli. Ad esempio, sapere se la frazione dei punti della successione compresi nell'intervallo $[3\pi/11, 4\pi/11]$ è davvero uguale a $\pi/11$ (la lunghezza dell'intervallo) è importante per il problema della ripartizione modulo 1, mentre per il problema della normalità un intervallo del genere sembra non avere alcun interesse (non essendo del tipo $[a/10^k, b/10^k]$). Si può dimostrare, comunque, che i due punti di vista sono, di fatto, equivalenti, ovvero che la normalità di $\sqrt{2}$ implica che la successione $10^n \cdot \sqrt{2}$ è uniformemente distribuita modulo 1 (anche la relazione inversa è vera, ma la cosa non dovrebbe sorprendere una volta afferrati i due concetti).

Aggiungiamo che, ovviamente, si possono prendere in considerazione anche altre basi di numerazione: la questione della normalità dell'espressione binaria di $\sqrt{2}$ si traduce così in quella della distribuzione modulo 1 della successione $2^n \cdot \sqrt{2}$. In maniera più generale, la normalità di $\sqrt{2}$ ci porterà a considerare $b^n \cdot \sqrt{2}$, e attualmente non si conosce la ripartizione modulo di tale successione per nessun intero b.

Così vicini, così diversi

Le difficoltà legate all'analisi della distribuzione modulo 1 di una successione come $10^n \cdot \sqrt{2}$ sono rese ancora più fastidiose dal fatto che per casi abbastanza simili si ottengono risultati precisi senza grossi sforzi. Per illustrare come riescano a convivere a stretto contatto il semplice e il complesso, consideriamo dunque i due problemi seguenti:

- determinare la ripartizione modulo 1 della successione delle potenze di $\sqrt{2}$ (cioè studiare il modo in cui si ripartiscono su un segmento di lunghezza unitaria i punti della successione definita da $\{(\sqrt{2})^n\}$;
- determinare la ripartizione modulo 1 della successione delle

potenze di $1 + \sqrt{2}$ (cioè studiare il modo in cui si ripartiscono su un segmento di lunghezza unitaria i punti della successione definita da $\{(1 + \sqrt{2})^n\}$).

Cominciamo con le potenze di $\sqrt{2}$:

$$(\sqrt{2})^1 = \sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2})^2 = 2$$
$$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2})^4 = 4$$
$$(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2})^6 = 8$$
$$(\sqrt{2})^7 = 8\sqrt{2}$$
$$(\sqrt{2})^8 = 16\ldots$$

La successione, dunque, si divide in due sotto-successioni: una di queste, formata dalle potenze pari di $\sqrt{2}$, contiene solo numeri interi (2, 4, 8, 16...), mentre l'altra è formata dalla sequenza $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, $8\sqrt{2}$ ecc., che possiamo riscrivere come $2^0\sqrt{2}$, $2^1\sqrt{2}$, $2^2\sqrt{2}$, $2^3\sqrt{2}$ ecc. Se prendiamo in esame la successione modulo 1, formata dalle parti frazionarie, vediamo che un termine su 2 vale 0 (la parte frazionaria di 2, 4 ecc. è nulla); gli altri termini corrispondono alla successione $\{2^k \cdot \sqrt{2}\}$. Mentre la ripartizione delle potenze pari di $\sqrt{2}$ è quanto c'è di più semplice, dunque, quella delle potenze dispari costituisce un grosso problema, perché riporta alla questione, tuttora irrisolta, della normalità della radice quadrata di 2 in base 2.

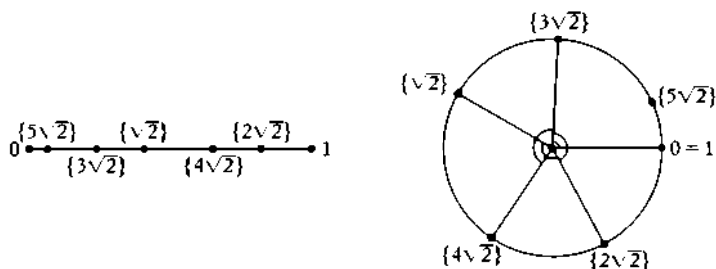
Consideriamo ora le potenze successive di $1 + \sqrt{2}$: *a priori*, non avendo fatto altro che aggiungere un intero (il numero 1) al numero che abbiamo appena analizzato (la radice di 2), si potrebbe pensare che la successione delle sue potenze, presa modulo 1, si comporti più o meno nello stesso modo di quella delle potenze di $\sqrt{2}$, e che quindi sia altrettanto difficile da capire. Non è così: è sorprendente, ma il comportamento modulo 1 della successione $(1 + \sqrt{2})^n$ è molto più semplice. Per dimostrarlo, serviamoci del risultato ottenuto nell'inserto del capitolo 18, per cui all'espressione

$$\frac{1+\sqrt{2}}{2}(1+\sqrt{2})^n + \frac{1-\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{2})^n$$

corrisponde sempre un numero intero (il numeratore della n-esima ridotta di $\sqrt{2}$).

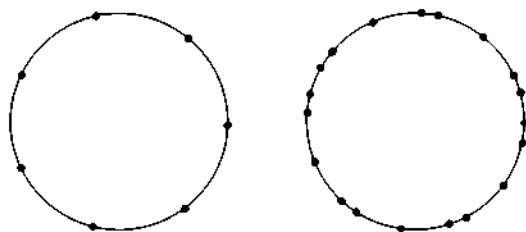
Dato che $1 - \sqrt{2}$ è un numero compreso tra -1 e 1, le sue potenze successive si avvicinano sempre di più a zero. Al crescere di n, dunque, il termine di destra è sempre più trascurabile. Perciò il termine di sinistra, che può essere espresso come $(1 + \sqrt{2})^{n+1}/2$, «si avvicina sempre di più a un numero intero». Lo stesso vale per $(1 + \sqrt{2})^n$: all'aumentare di n, $(1 + \sqrt{2})^n$ si avvicina sempre di più a un intero; anzi, a voler essere più precisi, a un numero pari (il doppio del numeratore di una ridotta).

La descrizione della ripartizione modulo 1 della successione $(1 + \sqrt{2})^n$, perciò, è semplicissima: i punti si accumulano tutti alle estremità del segmento (0 e 1); la successione, dunque, è ben lontana dall'essere uniformemente distribuita modulo 1.

Dalla successione delle potenze alla successione dei multipli

Abbiamo visto nel capitolo 16 che il problema della normalità di $\sqrt{2}$ è ancora in gran parte aperto (e con lui, quindi, anche quello della distribuzione uniforme della successione $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$); nella quinta parte del libro, invece, abbiamo mostrato come lo studio delle cifre decimali non rappresenti un passaggio obbligato per capire le proprietà fondamentali della radice quadrata di 2. Una volta riconosciuta la difficoltà dei problemi associati alla successione $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$, dunque, si può passare all'analisi di una successione alternativa, che non sia legata alla rappresentazione decimale. La più semplice è quella dei multipli interi di $\sqrt{2}$, vale a dire: $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$, e via dicendo. Anche qui ragioniamo «modulo 1», limitandoci cioè a considerare solo le parti frazionarie: $\{\sqrt{2}\}$, $\{2\sqrt{2}\}$, $\{3\sqrt{2}\}$, $\{4\sqrt{2}\}$ ecc. (andrebbero fatte alcune osservazioni anche sulle parti intere dei termini della successione: ce ne occuperemo nel corso del capitolo 23). Per una stranezza tipica della teoria della distribuzione modulo 1, i matematici, impotenti di fronte al problema della ripartizione di $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$, non hanno alcuna difficoltà a studiare la successione $\{n \cdot \sqrt{2}\}$.

Dato un numero x, si dice «successione di Kronecker di x» la successione formata dai termini $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$ ecc. Questa famiglia di successioni prende il nome dal matematico tedesco Leopold Kronecker, che per primo le studiò nel XIX secolo.

Analogamente a ciò che abbiamo fatto nel caso della successione $\{10^n \cdot \sqrt{2}\}$, possiamo rappresentare gli elementi di una successione di Kronecker come punti di un segmento i cui estremi sinistro e destro corrispondono rispettivamente ai valori 0 e 1. Però si può anche introdurre una rappresentazione nuova, che al posto di un segmento utilizza un cerchio e che permette di mettere in evidenza un fenomeno interessante su cui torneremo nel prossimo capitolo. Il cerchio si ottiene «incollando» i punti 0 e 1 del segmento precedente: alla successione dei punti della successione di Kronecker sul segmento corrisponde così una successione di punti sul cerchio; l'angolo al centro determinato da due punti successivi è costante, ed è proporzionale a $\{x\}$.

Sul segmento di sinistra, il passaggio da $\{x\}$ a $\{2x\}$, da $\{2x\}$ a $\{3x\}$ e così via si effettua spostandosi verso destra di una quantità sempre uguale a $\{x\}$. Nell'esempio della figura seguente, anche la distanza tra $\{2x\}$ e $\{3x\}$ è di $\{x\}$, a patto di «teletrasportarsi» in 0 non appena si raggiunge 1. Sul cerchio che si ottiene congiungendo le estremità del segmento, la successione dei punti $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$ ecc. si ottiene spostandosi sulla circonferenza a intervalli angolari costanti. Il valore esatto dell'angolo in funzione di x dipende dall'unità scelta per misurare gli angoli (ad esempio, $360 \cdot \{x\}$ gradi). Per evitare di appesantire le espressioni e i calcoli, la scelta più semplice consiste nel fissare a 1 il valore dell'angolo giro: in questo modo, l'angolo associato alla rotazione che permette di passare, nella successione $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$..., da un punto al successivo vale semplicemente $\{x\}$.

Il primo risultato importante su queste successioni è stato ottenuto nel 1884, quando Kronecker ha dimostrato che per qualsiasi x irrazionale, la successione di Kronecker di x è «densa» sul cer-

chio, cioè passa almeno una volta per tutti i punti della circonferenza (in realtà Kronecker ha dimostrato un risultato valido per una classe di successioni più vasta; sembra che il caso particolare che ci interessa sia stato trattato da Pafnutij Čebyšev qualche anno prima). La densità è una proprietà più debole dell'uniformità della distribuzione. Piers Bohl, Wacław Sierpiński e soprattutto Hermann Weyl, il principale artefice della teoria, hanno dimostrato in maniera indipendente, tra il 1909 e il 1910, un risultato più forte, che prenderemo per buono: la successione di Kronecker di qualsiasi numero irrazionale è uniformemente distribuita modulo 1.

La figura in basso mostra, a sinistra, il caso di un numero x razionale (nella fattispecie, $x = 1/7$): qui la successione di Kronecker passa sempre sugli stessi vertici di un poligono regolare (con un percorso che nella maggior parte dei casi è a stella). Tra i punti del poligono, quindi, ci sono dei «buchi», degli intervalli che la successione non visiterà mai. A destra, invece, sono rappresentati i primi punti della successione di Kronecker di un numero x irrazionale (nella fattispecie, $x = \sqrt{2}$). La successione dei punti non passa mai due volte nello stesso posto; non visiterà tutti i punti del cerchio, certo, ma in ogni caso non lascia alcun buco «visibile», cioè non è possibile trovare due punti distinti del cerchio tra i quali la successione non passerà mai: ritroviamo così la proprietà di «densità» dimostrata da Kronecker. La successione, inoltre, passa in media lo stesso tempo in tutte le regioni del cerchio, cioè è uniformemente distribuita.

Dal punto di vista della ripartizione modulo 1, dunque, tutte le successioni di Kronecker costruite a partire da numeri irrazionali si equivalgono: sono tutte uniformemente distribuite. In queste condizioni, non è chiaro in che modo le successioni di Kronecker potrebbero aiutare a distinguere tra numeri irrazionali distinti. Per

capire in che cosa differiscano tra loro i numeri irrazionali, e capire di conseguenza il ruolo unico della radice quadrata di 2 in questo contesto, conviene analizzare con maggior attenzione il fenomeno della distribuzione uniforme delle nostre successioni. Per la precisione, cercheremo di quantificare la nozione di ripartizione uniforme, studiando per ogni successione di Kronecker la «velocità» con cui si arriva alla ripartizione uniforme: in altre parole, il tempo necessario affinché i punti della successione si distribuiscano sul cerchio in maniera omogenea. Cogliamo l'occasione per osservare che i concetti che stiamo per esaminare non hanno un interesse puramente teorico, visto l'utilizzo intensivo che ne fanno attualmente i computer per effettuare calcoli che, altrimenti, sarebbero letteralmente irrealizzabili (parliamo del «calcolo di integrali multidimensionali», a partire dai lavori di Jurjen Ferdinand Koksma e Harald Niederreiter).

Qual è la velocità di una ripartizione?

Esistono vari modi di quantificare la velocità con la quale una successione si ripartisce sul segmento [0, 1] (vedi cap. 23): una di queste, che ben si adatta allo studio delle successioni di Kronecker, è detta «discrepanza-*» («discrepanza-asterisco»). L'idea di fondo si basa sulla constatazione seguente: se una successione s di N punti s_1, s_2 ... s_N sul segmento [0, 1] è ben distribuita, allora il numero di punti compresi nell'intervallo [0, 1/2] è uguale a $N/2$; analogamente, dobbiamo aspettarci di trovare $N/7$ punti di s compresi tra 0 e 1/7, e, più generalmente, aN punti di s tra 0 e a, qualunque sia il numero a compreso tra 0 e 1.

È ovvio che in realtà, per quanto possano essere ben distribuiti i punti della successione s, ci sono sempre dei numeri a per i quali il numero di punti compresi tra 0 e a non è esattamente uguale ad aN (basti pensare al caso in cui aN non è un numero intero). Per un dato valore di a, lo scarto tra il valore «ideale» aN e il numero effettivo di elementi di s compresi tra 0 e a è indicato con $\Delta_N(a)$. Naturalmente tale quantità dipende dalla successione s.

Il valore $\Delta_N(a)/N$ corrisponde alla differenza tra a, frequenza teorica del passaggio di un'ipotetica successione «uniformemente di-

stribuita in modo ideale» nell'intervallo $[0, a]$, e la frequenza realmente osservata per gli N punti della successione s. Si dice allora *discrepanza-** della successione s l'estremo superiore dell'insieme dei valori $\Delta_N(a)/N$ per a compreso tra 0 e 1. In termini più semplici (ma con una leggera ambiguità, che ignoreremo, tra estremo superiore e massimo): la discrepanza-* della successione s, indicata da $D_N^*(s)$, si ottiene cercando l'intervallo $[0, a]$ cui corrisponde il massimo scarto tra la frequenza di passaggio «ideale» e quella reale. Per chi non ha paura delle grandi formule, scriviamo:

$$D_N^*(s) = \sup\left(\frac{\Delta_N(a)}{N}, a \in [0, 1]\right) =$$

$$= \sup\left(\left|\frac{(\text{numero di } n \text{ tra 1 e } N \text{ tali che } s_n \in [0, a])}{N} - a\right|, a \in [0, 1]\right)$$

Per semplificare, diremo che con $D_N^*(s)$ si vuole quantificare il massimo difetto di omogeneità nella ripartizione dei primi N elementi della successione s.

Se il valore $D_N^*(s)$ si avvicina a zero all'aumentare di N, vuol dire che prendendo un numero sempre maggiore di punti di s il massimo difetto di omogeneità finisce per diventare trascurabile, il che significa che i punti della successione s si ripartiscono nell'intervallo $[0,1]$ in modo uniforme.

All'inverso, supponiamo che la successione s sia distribuita uniformemente, e analizziamo cosa succede a $D_N^*(s)$ all'aumentare di N. A prima vista, può sembrare evidente che il suo valore tenda a zero: dato che i punti si ripartiscono in modo sempre più omogeneo, lo scarto tra frequenza reale e frequenza ideale diventa sempre più debole, qualunque sia l'intervallo $[0, a]$, e «dunque» $D_N^*(s)$ tende a zero. Per una ragione non banale, legata alla presenza dell'estremo superiore nella definizione della discrepanza-*, in realtà un ragionamento del genere non è corretto (per chi fosse interessato, spieghiamo brevemente perché: potrebbe darsi che per ogni N si trovi un numero a_N, diverso al cambiare di N, tale che $\Delta_N(a_N)/N$ non tenda a zero, poiché ci informa solo sulle quantità $\Delta_N(a)/N$ in cui a è fissato una volta per tutte ed è solo N a poter variare).

Eppure, come ha dimostrato Weyl nel 1916, all'aumentare di N la discrepanza-* di una successione uniformemente distribuita tende davvero a zero. Va detto che, contrariamente a quello che si

potrebbe dedurre da un esame superficiale, $D^*_N(s)$ tende a zero senza costituire necessariamente una successione «decrescente», nel senso che l'aggiunta di un punto non fa diminuire sistematicamente la discrepanza-*. Tutto quello che possiamo dire è che, quando s è uniformemente ripartita, all'aumentare di N i valori $D^*_N(s)$ crescono meno frequentemente (e in misura minore), a tal punto che a lungo andare $D^*_N(s)$ è sempre più assimilabile a zero.

Tutte le successioni uniformemente distribuite, dunque, condividono la caratteristica di avere una discrepanza-* che tende a zero all'aumentare del numero di punti presi in considerazione. Di fronte alla discrepanza-*, però, le successioni uniformemente distribuite non sono tutte uguali, poiché la velocità alla quale $D^*_N(s)$ tende a zero dipende tantissimo da s. Per alcune successioni, ad esempio, la discrepanza-* è più o meno dell'ordine di $1/\sqrt{N}$; per altre, invece, è dell'ordine di $1/\sqrt[3]{N}$: entrambe tendono a zero, ma la prima lo fa molto più rapidamente della seconda. In altri termini, man mano che N aumenta $1/\sqrt{N}$ è «molto più piccolo» di $1/\sqrt[3]{N}$, nel senso che il loro rapporto, $1/\sqrt[6]{N}$, diventa molto piccolo.

Quanto detto finora rende possibile una «classifica» delle successioni uniformemente distribuite sulla base della loro velocità di ripartizione, ossia della velocità con cui la loro discrepanza-* tende a zero. All'interno di tale classifica, le successioni di Kronecker sono ben lungi dall'occupare tutte la stessa posizione: anzi, si può effettivamente dimostrare (vedi cap. seguente) che la velocità alla quale la discrepanza-* della successione di Kronecker di x tende a zero dipende molto dalla scelta di x. Di conseguenza, è possibile «classificare» i numeri irrazionali a partire dalla discrepanza-* della successione di Kronecker associata. Ci sono irrazionali «rapidi», irrazionali «lenti» e irrazionali «intermedi». Il problema, quindi, diventa quello di trovare l'irrazionale (o gli irrazionali) con un comportamento «estremo» da questo punto di vista.

Per una serie di ragioni che vedremo in seguito, non esiste un irrazionale «più lento di tutti gli altri», tale, cioè, che per quanto possa essere lento un irrazionale ce n'è sempre un altro ancora più lento. Esiste invece un irrazionale «più veloce di tutti». Il lettore avrà probabilmente capito qual è: si tratta della radice quadrata di 2, come vedremo nel prossimo capitolo. Rispetto alla discrepanza-*, quindi, $\sqrt{2}$ è «l'irrazionale estremo».

22.

Alla ricerca dell'irrazionale estremo

Secondo quanto abbiamo visto nel capitolo precedente, «l'irrazionale estremo» è quel numero irrazionale x la cui successione di Kronecker $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$, $\{4x\}$, ecc. possiede la discrepanza-* più rapida nel tendere a zero. Sfortunatamente, un'analisi dettagliata delle ricerche con cui Yves Dupain e Vera Sós hanno dimostrato che l'irrazionale in questione non è altro che la radice quadrata di 2 richiederebbe troppo tempo e troppi dettagli tecnici. Nel corso di questo capitolo, tuttavia, esamineremo il nesso profondo tra la velocità con cui la discrepanza della successione di Kronecker di un numero x tende a zero e la qualità dell'approssimazione di x mediante numeri razionali. È grazie a questa relazione che è possibile identificare gli irrazionali più «estremi», tra i quali $\sqrt{2}$ occupa un posto speciale. La questione dell'approssimazione mediante numeri razionali è legata ai lavori svolti nel XIX secolo da Joseph Liouville: costruendo il primo esempio di numero «trascendente», Liouville ha dato vita all'analisi diofantea, un nuovo filone di ricerche nell'ambito della teoria dei numeri, tuttora attivo.

Coppie di successioni

Dato un numero irrazionale x, come sapere se la sua successione di Kronecker si ripartisce «presto e bene» sul cerchio? In altri termini, come sapere se la sua discrepanza-* tende o no a zero? Per avvicinarci «gradualmente» alla risposta, cominceremo con l'esami-

nare il problema dal punto di vista dell'approssimazione dei numeri attraverso i decimali.

Sappiamo già che qualsiasi numero può essere approssimato da un numero decimale con una precisione grande a piacere. In pratica, per ottenere l'approssimazione decimale di un numero se ne tronca lo sviluppo in base dieci: per approssimare il numero π, ad esempio, si può utilizzare l'espressione $\pi = 3{,}14159265\ldots$, da cui deriva $\pi \approx 3{,}14159$. La differenza dal vero valore di π è dell'ordine di 10^{-5}, cioè di una parte su centomila. Ottenere una precisione più elevata vuol dire semplicemente fermarsi un po' più in là nei decimali di π.

Se d è un numero decimale vicino al numero irrazionale x, allora $2d$ è vicino a $2x$, $3d$ a $3x$ e così via; la vicinanza non durerà in eterno, non c'è dubbio, ma resta comunque valida per un po'. I primi punti delle successioni di Kronecker di d e di x, rispettivamente $\{d\}$, $\{2d\}$, $\{3d\}$ ecc. e $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$ ecc., saranno quindi vicini tra di loro. Ad esempio, se prendiamo $x = 0{,}123528\ldots$, approssimato dal decimale $d = 0{,}1$, i primi termini della successione di Kronecker di x non si discosteranno molto da quelli della successione di Kronecker di 0,1. Questi ultimi, come si può verificare facilmente, si dispongono secondo i vertici di un decagono (un poligono a dieci lati) regolare, in corrispondenza dei punti 0,1, 0,2, 0,3 e così via fino ad arrivare a 0,9, per poi riprendere con 1 che coincide con 0, 1,1 che coincide con 0,1, e così via. Si può dimostrare che di conseguenza la discrepanza-* della successione di Kronecker di $d = 0{,}1$ si stabilizza, dopo qualche fluttuazione iniziale, intorno al valore 1/10.

L'intuizione ci dice che disporre dieci punti secondo i vertici di un decagono regolare è il modo più uniforme di distribuirli, e si può dimostrare (ma noi non lo faremo, limitandoci a prendere per buona la validità della tesi) che le cose stanno effettivamente così. Perciò, dato che il numero x è vicino a d, la sua successione di Kronecker assomiglia in un primo tempo a quella di d, e quindi si distribuisce sul cerchio nel miglior modo possibile, almeno all'inizio.

Così vicini, così lontani

Fin qui, tutti i numeri sono uguali di fronte all'approssimazione decimale, e quanto abbiamo appena detto si applica indistintamente a tutti i numeri. Adesso, però, vedremo apparire una differenza. Ecco come.

Per un numero come $x = 0,104828...$, l'approssimazione mediante $d = 0,1$ è valida per una decina di termini della successione di Kronecker: si ha $\{10x\} = 0,04828...$ e $\{10d\} = 0$, che possiamo ancora considerare come vicini, ma $\{11x\} = 0,153108...$ si avvicina di più a $\{12d\}$ (pari a 0,2) che a $\{11d\}$ (0,1): siamo di fronte a un'indicazione esplicita del fatto che, dopo un po', le successioni di Kronecker non procedono più affiancate. Ora, è proprio questo il punto che ci consente di sperare che la discrepanza-* della successione di Kronecker di x tenda rapidamente a zero. I primi dieci termini di x, infatti, hanno una discrepanza-* prossima a quella di 0,1, la quale, come abbiamo visto, è il modello ideale della buona ripartizione di dieci punti. Se vogliamo che la successione di Kronecker di x si ripartisca presto e bene sul cerchio, però, è preferibile che, una volta passati i dieci punti, la sua somiglianza con quella di 0,1 finisca, perché a lungo andare il decagono può diventare una prigione. Ecco perché. Consideriamo, ad esempio, il numero y la cui espressione decimale comincia con 0,1000100000001... (le cifre successive non ci interessano). Come prima, dato che y è simile a 0,1, anche i primi termini della sua successione di Kronecker sono molto simili a quelli della successione di Kronecker di 0,1. Naturalmente, poiché y non è *rigorosamente* uguale a 0,1, giungerà per forza il momento in cui le due successioni smetteranno di essere così simili. Prima di arrivarci, però, bisognerà aspettare un bel po', molto di più di quanto abbiamo dovuto aspettare per il valore di x che abbiamo studiato prima. La differenza tra $\{1000y\}$ e $\{1000d\}$, ad esempio, non è che di 0,010000001... Dunque, i primi mille termini delle successioni di Kronecker di y e d sono praticamente indistinguibili, e i punti del cerchio associati ai primi mille termini della successione di Kronecker di y restano, per così dire, incollati ai punti del decagono che descrivono instancabilmente i termini della successione di Kronecker di d. Non ci vuole molto a

capire che ammassando i punti in questo modo si ottiene una ripartizione che non ha nulla di uniforme. È vero che a lungo andare i punti della successione di Kronecker di *y* finiranno per liberarsi dalla morsa del decagono regolare descritto dalla successione di Kronecker di *d*, dato che lo scarto tra i punti delle due successioni, inizialmente trascurabile, aumenta all'aumentare del numero di punti. Prima che ciò accada, però, la discrepanza-* della successione di Kronecker di *y* avrà accumulato un ritardo legato direttamente al fatto che l'approssimazione di *y* mediante *d* è precisa.

Che succede, allora, nel momento in cui non ha più senso prendere *d* come una buona approssimazione di *y*? I punti associati alla successione di Kronecker formano sempre qualcosa di molto simile a un decagono, che però si sfasa gradualmente rispetto al decagono iniziale. Per capire esattamente cosa succede, osserviamo che il valore $y = 0{,}100010000001\ldots$ è simile al numero decimale $d' = 0{,}100001$: lo scarto è dell'ordine di 10^{-12}, e dunque le successioni di Kronecker di *y* e di *d'* sono praticamente indistinguibili. Dato che *d'* è un numero decimale, i punti associati alla sua successione di Kronecker si distribuiscono ai vertici di un poligono di centomila lati: è una situazione a dir poco astratta, ma fondamentalmente identica a quella che avevamo visto nel caso di *d*. I primi centomila punti della successione di Kronecker di *d'* si distribuiscono sul cerchio nel modo più omogeneo possibile, proprio come il decagono associato alla successione di Kronecker di *d* rappresenta il modo più uniforme di ripartire dieci punti su un cerchio. Dopo i primi centomila punti, però, la vicinanza tra *y* e *d'* diventa un handicap per l'uniformità della ripartizione sul cerchio, per la stessa ragione che avevamo visto nel caso di *d*.

Limite di velocità

Facciamo un primo bilancio: i primi dieci termini della successione di Kronecker di *y*, disposti quasi su un decagono regolare, hanno un'ottima ripartizione sul cerchio, e quindi una discrepanza-* dell'ordine di 1/10 (è il meglio che si possa fare con dieci termini). Dato che lo scarto tra *y* e *d* è piccolissimo, gli altri termini della successione di Kronecker di *y* si accumulano sul decagono,

facendo stagnare la discrepanza-* al solito valore 1/10. Ogni pacchetto di dieci termini consecutivi della successione delinea una figura quasi identica a un decagono, sempre più sfasata rispetto al decagono iniziale. A poco a poco, dunque, i buchi tra i vertici del decagono si riempiono di punti: lentamente, la discrepanza-* diminuisce, fino ad arrivare al centomillesimo termine della successione, che si posiziona (a meno di uno scarto minuscolo) sull'ultimo vertice di un poligono regolare a centomila lati. A questo punto la discrepanza-* è quasi uguale a un centomillesimo, che è quanto di più piccolo si possa realizzare con centomila punti. E si ricomincia.

Quel che si è detto finora riassume qualitativamente l'evoluzione della discrepanza-* di qualsiasi successione di Kronecker: diminuzioni, seguite da stagnazioni (o da aumenti), cui seguono nuove diminuzioni, e così via. Affinché la successione di Kronecker di un numero si distribuisca il più rapidamente possibile sul cerchio (cioè senza accumulare ritardi eccessivi, per quanto questi finiscano sempre per essere recuperati), è necessario che il legame con le sue approssimazioni decimali non duri troppo a lungo.

Minore è la differenza tra un numero e le sue approssimazioni decimali, più è facile che la successione di Kronecker del numero accumuli ritardo. Questo particolare consente di capire perché non esistono numeri irrazionali la cui successione di Kronecker è «più lenta di qualsiasi altra successione» a distribuirsi sul cerchio, poiché non c'è limite al ritardo che un numero può accumulare. Ci vogliono centomila termini della successione per assorbire il ritardo accumulato da $y = 0{,}10001\ldots$ Prendiamo $y = 0{,}100000001\ldots$: il ritardo verrà recuperato solo dopo un miliardo di termini. È un filone inesauribile.

La discrepanza-* di una successione di Kronecker, dunque, può tendere a zero dopo un tempo arbitrariamente lungo. La sua velocità, invece, non può superare un certo limite. Per determinarlo, sappiamo da quanto abbiamo visto in precedenza che dobbiamo rivolgere la nostra attenzione ai numeri x le cui approssimazioni decimali sono «di qualità scadente», nel senso che non costringono la successione di Kronecker di x a imitare troppo a lungo quella di un numero decimale.

Torniamo per un istante sulla possibilità di approssimare un numero x attraverso un numero decimale, cioè una frazione del tipo

$p/10^k$, dove p e k sono numeri interi. Se si fissa il valore di k, per ottenere un valore di p sensato si prendono le prime k cifre decimali di x dopo la virgola e si «sopprime» quest'ultima. Ad esempio, per approssimare $\sqrt{2} = 1{,}414213562373...$ con $k = 7$, si possono prendere le cifre decimali fino alla settima, formando così l'intero $p = 14142135$. Si tratta dell'approssimazione «per difetto». L'approssimazione «per eccesso» corrispondente consiste nell'aggiungere 1 al valore precedente di p, ottenendo 14142136. In entrambi i casi, la differenza con $\sqrt{2}$ è inferiore a 10^{-7}.

L'esempio in questione illustra un caso generale che può essere sintetizzato dalla formula seguente: per qualsiasi numero x e qualsiasi intero (positivo) k, esiste un intero p (e talvolta addirittura due) tale che

$$\left| x - \frac{p}{10^k} \right| \leq \frac{1}{10^k}$$

Questa tendenza dei numeri decimali a stringere in una morsa qualsiasi numero x deve essere intesa nel modo seguente: quando si cerca una buona approssimazione decimale per x, il denominatore 10^k della frazione $p/10^k$ del membro di sinistra dell'uguaglianza precedente quantifica il «prezzo» da pagare per una buona precisione, dove la qualità è rappresentata dal membro di destra, $1/10^k$. La nostra disuguaglianza, perciò, fissa un limite alla ricerca dei numeri che i decimali non riescono ad approssimare in maniera soddisfacente: per qualsiasi numero x di cui si cerca un'approssimazione con una certa precisione, esiste un numero decimale che la realizza con «rapporto qualità-prezzo» ragionevole.

Dai decimali ai razionali

Dunque basterebbe trovare il numero che i decimali «approssimano peggio»? L'idea è allettante, ma purtroppo è incompleta, e il nostro compito, adesso, è di colmarne le lacune. Non vi è alcuna ragione, infatti, di accordare ai decimali una tale importanza, a parte la semplificazione che rendono possibile. Dopotutto, quanto detto finora avrebbe funzionato esattamente nello stesso modo in qualsiasi altra base di numerazione. E la qualità dell'approssima-

zione di un numero, sfortunatamente, varia molto a seconda della base prescelta. Un numero i cui primi decimali sono 0,33333333338, ad esempio, non è approssimato molto bene dal decimale 0,3, né dal decimale 0,33, né dai successivi. La sua espressione in base tre, invece, comincia con 0,1000000, e dunque il numero la cui espressione in base tre è 0,1 (cioè il numero uguale a un terzo) ne rappresenta un'ottima approssimazione. A questo punto si mette in moto nel nuovo sistema di riferimento tutto il meccanismo che abbiamo visto per i decimali, in maniera assolutamente identica, a parte il decagono, rimpiazzato da un triangolo equilatero. Un numero che fino a un certo punto ha come miglior approssimazione un numero decimale, inoltre, in seguito potrebbe essere approssimato meglio da in un'altra base.

Per superare queste difficoltà è meglio svincolarsi dal punto di vista delle basi di numerazione. Ma come? Se osserviamo meglio il numero che abbiamo visto prima, $y = 0{,}100010000001\ldots$ (in base dieci), noteremo che il ritardo della sua successione di Kronecker non era dovuto tanto al fatto che la miglior approssimazione di y fosse un numero decimale, quanto alla sua eccessiva vicinanza a un'altra successione di Kronecker, quella di 0,1, la cui ripartizione sul cerchio non era uniforme. Ora, come abbiamo già detto nel capitolo precedente, le uniche successioni di Kronecker che non si ripartiscono uniformemente sul cerchio sono quelle dei numeri razionali (i punti della successione di Kronecker di un numero razionale, infatti, si accumulano sui vertici di un poligono regolare). Se ne deduce che i numeri per i quali la discrepanza-* della successione di Kronecker tende più rapidamente a zero vanno cercati tra i numeri «peggio approssimati dai numeri razionali».

I peggio approssimati dai numeri razionali

Come quantificare il concetto di numeri «approssimati male da un numero razionale»? Nel corso della quinta parte abbiamo visto vari modi per descrivere l'approssimazione di un numero attraverso dei razionali: il metodo di Stern-Brocot, la rappresentazione sturmiana, le ridotte della frazione continua, le frazioni continue ascendenti... Ognuno di loro può aspirare al titolo di «buon» modo

di fare per tale o talaltro problema. Ce ne sarà uno che va bene nel contesto delle successioni di Kronecker?

Per trovare il punto di vista migliore, riprendiamo l'uguaglianza che abbiamo ottenuto in precedenza, e che limitava «la distanza di un numero x dai decimali». Il passaggio dai decimali, espressi come $p/10^k$, ai razionali, p/q, induce a generalizzare la disuguaglianza nel modo seguente:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q}$$

A priori, vista la semplicità del cambiamento, potremmo pensare che quanto abbiamo detto finora per i decimali valga anche per i razionali. A un esame più attento, invece, si vede che sono necessari dei piccoli aggiustamenti.

Indipendentemente dal fatto che si voglia approssimare x mediante numeri decimali o razionali, in entrambi i casi la problematica è la seguente: costruire una «griglia» di punti sufficientemente vicini gli uni agli altri da garantire che qualsiasi numero x finisca per forza per ritrovarsi vicino a uno di loro. Dal punto di vista dei decimali, se ci si limita ai numeri che hanno al più n cifre dopo la virgola, la griglia che ne deriva è formata da 10^n valori, separati gli uni dagli altri da un intervallo regolare pari a $1/10^n$: grazie a questa caratteristica, un numero non può distare più di $1/10^n$ da qualsiasi elemento della griglia (per la precisione, il massimo scarto possibile corrisponde al caso in cui x si trova esattamente a metà strada tra due dei nostri decimali; in tal caso il suo valore è pari alla metà di $1/10^n$).

Avendo deciso di lavorare con i numeri razionali, questa volta approssimiamo x attraverso la frazione p/q che più si avvicina a x e il cui denominatore q è minore di un intero N fissato in precedenza (nel caso dei decimali era $N = 10^n$). L'insieme di queste frazioni forma una nuova griglia, molto più ricca della precedente. Cerchiamo di capire cosa significa. Per semplicità, ci concentreremo su quella parte della nostra griglia che corrisponde ai numeri compresi tra 0 e 1, senza che per questo il ragionamento perda di generalità. L'insieme delle frazioni decimali il cui denominatore non supera $N = 10^n$ non è difficile da definire, poiché corrisponde ai numeri compresi tra 0 e 1 e con un massimo di n cifre dopo la vir-

gola (e quindi possiede $10^n = N$ elementi). Consideriamo ora il numero di frazioni p/q comprese tra 0 e 1 e con un denominatore minore o uguale a N. Per costruire una frazione del genere bisogna scegliere due interi, p e q, compresi tra 1 e N, il che porta a un totale di N^2 possibilità diverse. Tra tutte queste, bisogna eliminarne una metà, quella in cui p è maggiore di q (dato che ci siamo messi tra 0 e 1). Restano così $N^2/2$ possibilità, che diminuiscono ulteriormente se tiene conto del fatto che alcune frazioni sono contate più volte (ad esempio, i casi in cui $p = 3$, $q = 7$ da un lato, e $p = 6$, $q = 14$ dall'altro sono stati contati come distinti, mentre in realtà corrispondono allo stesso valore $3/7 = 6/14$). Trascuriamo pure questo particolare, e continuiamo a ragionare come se i numeri esprimibili sotto forma di frazione compresi tra 0 e 1 e con un denominatore al più uguale a N fossero $N^2/2$: l'ipotesi non è completamente corretta, ma non si discosta neanche molto dalla realtà. Ammettiamo anche – sarà la nostra ultima forzatura – che tutte queste frazioni, rappresentate da punti su un segmento le cui estremità corrispondono ai valori 0 e 1, siano equidistanti le une dalle altre (analogamente a quanto accade nel caso delle frazioni decimali). Disponiamo le nostre $N^2/2$ frazioni a uguale distanza le une dalle altre su un segmento di lunghezza unitaria. Abbiamo dunque $(N^2/2) \times d = 1$, da cui deriva $d = 2/N^2$. La nuova griglia formata da queste frazioni è costituita da numeri separati gli uni dagli altri da un intervallo pari a $2/N^2$. Un numero x compreso tra 0 e 1 e situato il più lontano possibile dai punti della griglia, quindi, si trova a metà strada tra due di questi, a una distanza pari alla metà di $2/N^2$, ovvero $1/N^2$.

Se potessimo dimenticarci delle due forzature che abbiamo imposto per semplificare il ragionamento, avremmo dimostrato che, per qualsiasi numero x (compreso tra 0 e 1, ma quanto detto finora potrebbe essere esteso con facilità a tutti gli altri numeri) e per qualsiasi intero N, esiste una frazione p/q con il denominatore q al più uguale a N e tale che:

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{N^2}$$

Proprio a causa delle due forzature, però, in realtà la relazione non vale per ogni x e per ogni N. Al di là delle inesattezze, comun-

que, il ragionamento precedente consente di capire buona parte dei concetti generali che entrano in gioco nella problematica dell'approssimazione di un numero mediante un numero razionale. Utilizzando un'idea elegante ma la cui efficacia può essere provata facendo ricorso a ragioni non del tutto evidenti (si veda l'inserto qui sotto), è possibile dimostrare la veridicità di una formula simile alla precedente, in cui il membro di destra, $1/N^2$, viene semplicemente sostituito da $1/q^2$ (maggiore di $1/N^2$, dato che q è minore di N):

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| \leqslant \frac{1}{q^2}$$

Questa è la formula fondamentale dello studio delle approssimazioni dei numeri mediante numeri razionali.

Calzini, cassetti e approssimazioni razionali Dimostreremo ora che per ogni numero irrazionale x esiste un'infinità di frazioni irriducibili p/q tali che lo scarto tra x e p/q è inferiore a $1/q^2$. A tale scopo, consideriamo un intero positivo N qualsiasi, e consideriamo i primi $N + 1$ termini della successione di Kronecker di x. Suddividiamo poi l'intervallo $[0, 1]$ che contiene gli elementi della successione in N sotto-intervalli identici di lunghezza $1/N$. Avendo a disposizione $N + 1$ elementi della successione da distribuire in N sotto-intervalli, in almeno uno di questi troveremo due elementi distinti della successione di Kronecker di x. La distanza tra i due termini, chiamiamoli $\{mx\}$ e $\{nx\}$, è dunque minore di $1/N$ (la lunghezza del loro sotto-intervallo comune). Ad esempio, prendiamo $m < n$, e poniamo $q = n - m$: dato che la distanza tra $\{mx\}$ e $\{nx\}$ è inferiore a $1/N$, anche la distanza tra $\{qx\} = \{(n - m)x\}$ e $0 = \{(m - m)x\}$ è inferiore a $1/N$, e quindi anche a $1/q$, dato che, per costruzione, $q \leqslant N$. Perciò esiste un intero, diciamo p, tale che la distanza tra qx e p è minore di $1/q$. Dividendo tutto per q, si trova che la distanza di x dalla frazione p/q è minore di $1/q^2$. A questo punto basta far tendere N a infinito, e si ottiene una successione di frazioni p/q che soddisfano la disuguaglianza prescelta, frazioni che non possono essere tutte uguali le une alle altre, altrimenti x sarebbe razionale.

La dimostrazione è stata data nel XIX secolo dal tedesco Gustav Dirichlet. Oggi si chiama «principio di Dirichlet» l'osservazione per

cui, dati un insieme di N intervalli e un insieme di $N+1$ punti in essi ripartiti, esiste necessariamente un intervallo che conterrà almeno due dei punti. L'analogia con le paia di calzini riposte nei cassetti ha fatto sì che il principio venisse ribattezzato «principio dei cassetti», mentre gli inglesi parlano di «principio della casella postale» (*pigeonhole principle*).

La caccia all'estremo

In generale, la qualità di un'approssimazione realizzata mediante un numero decimale è direttamente proporzionale al numero di cifre dell'approssimazione stessa: 3,14159 ha 5 cifre dopo la virgola, la differenza rispetto a π è dell'ordine di 10^{-5}, e non è il caso di chiedere di meglio, a eccezione di alcuni numeri dalla forma particolare (quelli che mostrano delle lunghe serie di zeri, come 1,5600000003..., la cui approssimazione mediante 1,56 ha una precisione di una parte su 10^{11} nonostante ci siamo limitati a due cifre dopo la virgola). Si può dimostrare che, analogamente, la stragrande maggioranza dei numeri non è approssimabile dai numeri razionali meglio di quanto suggerisca la formula precedente: dato un numero x, esistono sempre delle frazioni p/q sempre più vicine a x e che non se ne allontanano più di $1/q^2$; a eccezione di qualche valore particolare di x, però, la differenza rispetto a una tale frazione p/q non è mai molto più piccola di $1/q^2$ (gli intenditori riconosceranno in questa affermazione una piccola inesattezza; la sua correzione, però, sarebbe decisamente lunga e laboriosa, e non ne trarremmo alcun vantaggio sostanziale). Ci vuole un gran colpo di fortuna perché un numero scritto in base dieci mostri sequenze di zeri sempre più lunghe (e sempre più frequenti), proprio come è difficile finire imbattersi in un numero «approssimato molto bene da un numero razionale».

Per distinguere, nella massa dei numeri mal approssimati dai numeri razionali, quelli che lo sono ancora meno degli altri, si rende quindi necessario portare la formula precedente a un livello estremamente fine: non ci si può accontentare di valutare l'ordine di grandezza dello scarto tra x e p/q, bisogna conoscerlo con mag-

gior precisione. A tale scopo bisogna conoscere meglio le frazioni p/q coinvolte nella relazione precedente, e in pratica sono le frazioni continue a darcene la possibilità. Si può dimostrare che tutte le ridotte di un numero x come approssimazioni razionali soddisfano la relazione precedente. Esistono di sicuro altre frazioni dotate di questa proprietà (per trovarle basta cercare tra gli approssimanti di Farey), ma sono le ridotte a definire il contesto preciso in cui è opportuno condurre la ricerca.

Scriviamo lo sviluppo di x in frazione continua come

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

Da quanto abbiamo visto nel corso del capitolo 17, le ridotte successive sono:

$$a_0 \qquad a_0 + \frac{1}{a_1} \qquad a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

Prendiamo la terza ridotta: la sua differenza rispetto alla frazione continua completa che corrisponde al valore di x dipende dal pezzo che è stato cancellato dalla frazione continua, e che vale $1/(a_3 + \ldots)$ e che rappresenta un «quoziente completo» di x (nella fattispecie il terzo, visto che comincia con a_3). L'errore che si commette confondendo x con la sua terza ridotta è tanto più grande quanto più è grande il terzo quoziente completo. Ora, quest'ultimo aumenta al diminuire di a_3, e viceversa.

In maniera più generale, dunque, la differenza tra x e le sue ridotte, che corrisponde in pratica alla qualità dell'approssimazione di x mediante numeri razionali, aumenta al diminuire dei suoi quozienti parziali. In parole povere, perciò, *maggiore è il numero di quozienti parziali piccoli posseduti da un numero, peggiore è il «rapporto qualità prezzo» delle sue approssimazioni razionali*, nel senso che abbiamo specificato quando abbiamo presentato l'idea in questione. Da quanto si è detto, dunque, il numero «più lontano dai razionali» va ricercato con i quozienti parziali più piccoli. I quozienti parziali della radice quadrata di 2 sono tutti uguali a 2 (tran-

ne il primo, che vale 1). Quindi $\sqrt{2}$ è uno di questi numeri, ed è tale caratteristica che gli consente di essere il numero la cui successione di Kronecker si ripartisce sul cerchio con la massima velocità, nel senso inteso dalla discrepanza-*. Bisogna notare, tuttavia, come non sia la radice quadrata di 2 a possedere i quozienti parziali più piccoli, bensì il «numero aureo $(1+\sqrt{5})/2$, che li ha tutti uguali a 1. Eppure è proprio alla radice quadrata di 2 che tocca il titolo di «irrazionale estremo» rispetto alla discrepanza-* delle successioni di Kronecker, per ragioni profonde molto difficili da isolare e che mostrano i limiti dell'identificazione dei numeri mal approssimati dai razionali con i numeri la cui successione di Kronecker si distribuisce il più rapidamente possibile (ci ritorneremo nel capitolo seguente).

Per concludere, segnaliamo come il fatto che la radice quadrata di 2 sia particolarmente mal approssimata da numeri razionali può andare a favore dell'idea per cui $\sqrt{2}$ è un numero normale (vedi cap. 16). Essere mal approssimati da un razionale, infatti, vuol dire essere mal approssimati da un numero decimale, il che, tra le altre cose, vieta la presenza di sequenze di zeri esageratamente lunghe nello sviluppo decimale di $\sqrt{2}$. L'indizio della normalità di $\sqrt{2}$, però, è debole, anzi debolissimo, perché consente di escludere un numero molto ristretto di fenomeni da cui si possa giungere alla non-normalità di $\sqrt{2}$. Come se non bastasse, nel 2002 Yann Bugeaud ha stabilito l'esistenza di numeri molto ben approssimati da razionali normali in tutte le basi. La questione della normalità offre davvero pochi appigli semplici.

23.

Duello al vertice I
Le vittorie del numero aureo

Il «duello» che ci impegnerà in questi ultimi due capitoli vede opporsi la radice quadrata di 2 e il numero aureo φ, $(1 + \sqrt{5})/2$. La somiglianza delle loro caratteristiche dimostra in maniera sorprendente il legame profondo tra le due costanti. D'altronde, è possibile che i lettori più informati su alcuni fatti relativi all'approssimazione razionale e alle frazioni continue si siano stupiti del fatto che, nei capitoli precedenti, in diverse questioni si sia attribuito alla radice quadrata di 2 un ruolo tradizionalmente affidato al numero aureo.

In questo capitolo ci porremo nell'ottica in cui è il numero aureo a prendere il sopravvento, diventando «il più irrazionale di tutti i numeri irrazionali», lasciando alla radice quadrata di 2 il ruolo di delfino nella piramide dei numeri notevoli. Nel capitolo successivo, invece, esamineremo altre situazioni in cui è la radice quadrata di 2 a dominare la scena, relegando il numero aureo in un ruolo di comprimario.

La battaglia delle frazioni continue

Nel capitolo 17 abbiamo incontrato il concetto di frazione continua, e abbiamo visto come possa essere dedotto da considerazioni geometriche già accessibili al tempo degli antichi Greci. La dimostrazione di Chrystal dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$ che abbiamo dato in quella circostanza ci ha portato allo sviluppo di $\sqrt{2}$ in frazione continua, esprimibile, lo ricordiamo, nel modo seguente:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

Nel 1945, lo storico della matematica Kurt von Fritz ha dimostrato come sia possibile, con argomenti geometrici analoghi a quelli usati da Chrystal, dimostrare l'incommensurabilità della diagonale e del lato del pentagono regolare. Il rapporto tra le due lunghezze, infatti, è uguale al numero aureo; per inciso, la dimostrazione di von Fritz, di cui vedremo una variante interessante nel prossimo capitolo, fornisce lo sviluppo in frazione continua del numero aureo.

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}} .$$

Il numero aureo, dunque, è quel numero il cui sviluppo in frazione continua ha i quozienti parziali più piccoli che si possano immaginare, il che gli conferisce una proprietà «estremale» che lo distingue da tutte le altre quantità irrazionali e che ne fa il numero «peggio approssimato da un numero razionale» nel senso seguente. Nel capitolo precedente abbiamo visto perché, dato un numero irrazionale x qualunque, esiste un'infinità di numeri razionali p/q tali che lo scarto tra x e p/q sia minore di $1/q^2$. Nel 1891, Adolf Hurwitz si è spinto più in là, dimostrando che per ogni x irrazionale esiste un'infinità di numeri razionali p/q tali che lo scarto tra x e p/q sia minore di $1/(q^2\sqrt{5})$ (si tratta effettivamente di un risultato più forte, dato che $1/(q^2\sqrt{5})$ è una quantità minore di $1/q^2$). Hurwitz ha dimostrato anche che non è possibile sostituire $\sqrt{5}$ con un valore più grande, e proprio a causa del numero aureo: provate a mettere al posto di $\sqrt{5}$ un altro numero più grande, anche molto vicino a $\sqrt{5}$, e vedrete che il risultato di Hurwitz non vale più per il numero aureo e per altri irrazionali imparentati con que-

st'ultimo, i cosiddetti «numeri nobili» (quelli il cui sviluppo in frazione continua possiede quozienti parziali tutti uguali a 1 a eccezione dei primi). Sempre a Hurwitz si deve la dimostrazione del fatto che escludendo i numeri nobili, nel risultato precedente è possibile mettere $2\sqrt{2}$ al posto di $\sqrt{5}$.

Con i suoi quozienti parziali tutti uguali a 2 (a parte il primo), la radice quadrata di 2, dal canto suo, sembra restare relegata al rango di un numero per così dire «qualunque» agli occhi della teoria delle frazioni continue. Si direbbe quindi che quest'ultima, di cui abbiamo potuto sottolineare, nel corso del capitolo 17, il ruolo centrale nella rappresentazione dei numeri, abbia scelto da che parte stare. C'è un problema, però: come conciliare il verdetto emesso dalle frazioni continue, da cui deriva il risultato di Hurwitz, con il punto di vista della discrepanza-* delle successioni di Kronecker, di cui abbiamo visto nei capitoli 21 e 22 il legame profondo con l'approssimazione mediante numeri razionali, e che accorda alla radice quadrata di 2 lo status di numero irrazionale più estremo, a spese del numero aureo?

Il terreno conteso della discrepanza

Yves Dupain e Vera Sós, che nel 1981 hanno dimostrato il carattere estremale di $\sqrt{2}$ dal punto di vista della discrepanza-* della sua successione di Kronecker (vedi cap. precedente), sono rimasti non poco sorpresi nel vedere la radice quadrata di 2 in un ruolo che credevano riservato al numero aureo. Nel loro articolo, i due confessano il proprio stupore in questi termini: «Sappiamo che la discrepanza di una successione [del tipo] $\{n\alpha\}$ dipende dai quozienti parziali [di α]. È "piccola", o "grande", a seconda che [tali quozienti parziali] siano "grandi" o "piccoli" [...] Ci si potrebbe aspettare, dunque, che il suo valore minimo sia quello associato [al numero aureo, che ha tutti i quozienti parziali pari a 1]. Il fatto che non sia così è assolutamente sorprendente». La ragione profonda di un risultato così «sorprendente» non è facile da determinare. Sul piano tecnico, ciò che permette a $\sqrt{2}$ di dimostrarsi «migliore del numero aureo è una proprietà di simmetria della discrepanza-* che non vale per il numero aureo (ne riparleremo brevemente più in là).

Da questo risultato, però, non segue una vittoria completa e definitiva della radice quadrata di 2 sul numero aureo sul piano della distribuzione modulo 1. La nozione di discrepanza-*, infatti, non è che un modo di rappresentare la velocità di ripartizione modulo 1 di una successione. Un altro concetto utilizzato con uguale frequenza è quello di *discrepanza* (senza stella): dati N punti di una successione s sul cerchio unitario, la loro discrepanza, indicata con $D_N(s)$, è definita come la discrepanza-*, con l'unica eccezione che le differenze tra la frequenza di passaggio teorica e quella reale sono considerate in tutti gli intervalli, cioè negli insiemi del tipo $[u,v]$ e non solo in quelli del tipo $[0, a]$. La definizione rigorosa della discrepanza $D_N(s)$ di una successione s di N punti è la seguente (riprendendo le notazioni del capitolo 21):

$$D_\mathrm{N}(s) = \sup\left(\frac{\Delta_\mathrm{N}(v) - \Delta_\mathrm{N}(u)}{N},\ u,\ v \in [0,\ 1]\right) = \sup$$
$$\left(\left|\frac{\text{numero di } n \text{ tra } 1 \text{ e } N \text{ tali che } s_n \in [u,\ v]}{N}\right| - (v - u)u,\ v \in [0,\ 1]\right)$$

La differenza tra la discrepanza e la discrepanza-* non è enorme. Si può dimostrare che, in sostanza, entrambe manifestano lo stesso comportamento: ad esempio, la discrepanza tende a 0 (al crescere di N) se, e solo se, la successione s è uniformemente distribuita (l'enunciato equivalente per la discrepanza-* è stato dato nel capitolo 21). Volendo essere ancora più precisi: data una successione, il rapporto tra la discrepanza e la discrepanza-* è sempre compreso tra 1 e 2, qualunque sia N (non è difficile vedere che la discrepanza è sempre maggiore o uguale alla discrepanza-*, dato che la definizione della prima «include» un numero di intervalli maggiore; capire come mai la discrepanza non sia mai maggiore del doppio della discrepanza-* è un esercizio che lasciamo al lettore). Da un punto di vista qualitativo, dunque, il comportamento asintotico della discrepanza e della discrepanza-* di una data successione è identico.

Da tutto ciò segue che, per le successioni di Kronecker, la discrepanza e la discrepanza-* mostrano sostanzialmente le stesse cose: più il numero x è «mal approssimato dai numeri razionali», più la discrepanza della successione $\{x\}$, $\{2x\}$, $\{3x\}$,... tende rapidamente a 0.

Sebbene sia corretta nelle linee generali, l'affermazione precedente non risponde, da sola, alla questione del cosiddetto «irrazionale più estremo»: la presenza di un fattore compreso tra 1 e 2 tra le due discrepanze fa sì che la radice quadrata di 2, irrazionale estremo agli occhi della discrepanza-*, non debba necessariamente rimanere tale anche dal punto di vista della discrepanza. Tra i rari numeri irrazionali capaci di trarre vantaggio da questa leggera differenza tra le due discrepanze troviamo... il numero aureo, che, da questo punto di vista, ha buone probabilità di sottrarre a $\sqrt{2}$ l'importante titolo di «numero più irrazionale di tutti». Secondo gli specialisti, più che di probabilità si dovrebbe parlare di certezza, ma è pur sempre vero che, curiosamente, non ne sia mai stata pubblicata alcuna dimostrazione.

Potremmo anche rivolgere la nostra attenzione ad altre varianti della nozione di discrepanza, in particolare a quella che consiste nel limitarsi ad analizzare solo gli intervalli in cui una delle estremità ha un valore prefissato (che per la discrepanza-* vale 0, ma che potrebbe essere un valore qualunque tra 0 e 1, come ad esempio 1/2) e nel cercare di determinare l'irrazionale più estremo nel senso di questa nuova quantificazione della velocità di ripartizione; per quanto ne sappiamo, finora non sono mai stati fatti studi del genere. La simmetria di cui abbiamo parlato prima, quando discutevamo del risultato di Dupain e Sós (che porta $\sqrt{2}$ al primo posto dal punto di vista della discrepanza-*), riguarda una di queste discrepanze alternative: chiamiamo dunque «discrepanza-* negativa» la discrepanza definita sugli intervalli del tipo $[a, 1]$; si può dimostrare che la discrepanza-* e la discrepanza-* negativa della successione di Kronecker di $\sqrt{2}$ sono le stesse, il che non capita con il numero aureo. È grazie a questo punto di vista tecnico che $\sqrt{2}$ può mostrarsi più «estremo» di φ dal punto di vista della discrepanza-*.

Intanto, le parti intere...

Il punto di vista delle successioni di Kronecker si concentra sulle parti frazionarie delle successioni di numeri definite da $n\sqrt{2}$ o $n\varphi$. E che cosa ne è delle parti intere? Per definizione, dato un numero x, la sua parte intera $I(x)$ è il più grande nume-

ro intero minore o uguale a x. Perciò $I(12,4) = 12$, $I(7,9) = 7$, $I(3) = 3$ ecc.

Consideriamo l'insieme A formato dalle parti intere dei termini della successione dei numeri $n\sqrt{2}$. Ecco i primi elementi di A:

$$1 \cdot \sqrt{2} = 1,414...1$$
$$2 \cdot \sqrt{2} = 2,828...2$$
$$3 \cdot \sqrt{2} = 4,242...4$$
$$4 \cdot \sqrt{2} = 5,656...5$$
$$5 \cdot \sqrt{2} = 7,071...7$$
$$6 \cdot \sqrt{2} = 8,485...8$$
$$7 \cdot \sqrt{2} = 9,899...9$$
$$8 \cdot \sqrt{2} = 11,313...11$$
$$9 \cdot \sqrt{2} = 12,727...12$$
$$10 \cdot \sqrt{2} = 14,142...\ 14$$
$$11 \cdot \sqrt{2} = 15,556...\ 15$$
$$12 \cdot \sqrt{2} = 16,970...\ 16$$
$$13 \cdot \sqrt{2} = 18,384...\ 18$$
$$14 \cdot \sqrt{2} = 19,798...\ 19$$
$$15 \cdot \sqrt{2} = 21,213...\ 21$$

A questo punto prendiamo l'insieme A' formato da tutti gli interi positivi che non appartengono ad A: i suoi primi elementi sono 3, 6, 10, 13, 17, 20 ecc.

Scriviamo quindi gli elementi di A e A' allineandoli gli uni sugli altri:

A:	1	2	4	5	7	8	...
A':	3	6	10	13	17	20	...

Infine calcoliamo la differenza tra gli elementi di A' e quelli di A, colonna per colonna. Otteniamo così la successione:

2-4-6-8-10-12-...

Difficile credere a una semplice coincidenza... e infatti il fenomeno è generale. Possiamo enunciare il teorema seguente:

Sia a_n l'n-esimo elemento di A (dove A è ordinato in maniera crescente), e sia a'_n l'n-esimo elemento di A' (ugualmente ordinato in maniera crescente): allora, per qualsiasi valore di n, si ha $a'_n - a_n = 2n$.

Sfortunatamente non siamo riusciti a identificare l'autore di questo risultato, né la dimostrazione utilizzata. Un modo di procedere è questo (i dettagli sono descritti nel prossimo inserto). Si comincia dimostrando che, per ogni n, il numero $a_n + 2n$ non appartiene ad A (e dunque fa parte di A'): a tale scopo, si individuano quegli interi m che, moltiplicati per $\sqrt{2}$, si avvicinano di più al valore $a_n + 2n$, e poi si verifica che nessuno di loro soddisfa l'uguaglianza $I(m\sqrt{2}) = a_n + 2n$. La seconda tappa consiste nel dimostrare che tutti gli elementi di A' hanno effettivamente la forma $a_n + 2n$: per ogni intero N contiamo il numero x degli elementi di A minori di N, nonché il numero y degli interi esprimibili nella forma $a_n + 2n$ e minori di N (tutti appartenenti ad A', da quanto si è visto nella prima parte della dimostrazione). A questo punto basta verificare che $x + y$ è uguale a N per essere sicuri che, per ogni N, tutti gli interi minori di N sono del tipo a_n o del tipo $a_n + 2n$, e quindi che tutti gli elementi di A' sono del tipo $a_n + 2n$, il che conclude la dimostrazione.

Dimostrazione del teorema Ecco i dettagli della dimostrazione esposta sommariamente nel testo.

Prima tappa: sia n un numero intero strettamente positivo, sia δ quel numero reale strettamente positivo, compreso tra 0 e 1, tale che $n\sqrt{2} = I(n\sqrt{2}) + \delta = a_n + \delta$. Dimostreremo che l'intero $a_n + 2n$ non appartiene ad A, cioè che non esiste un intero m tale che $I(m\sqrt{2}) = a_n + 2n$. Se esiste un intero m tale che $I(m\sqrt{2}) = a_n + 2n$, allora si ha $m\sqrt{2} = I(m\sqrt{2}) = a_n + 2n + \delta'$, dove δ' è strettamente compreso tra 0 e 1. Quindi:

$$m = \frac{(a_n + 2n + \delta')}{\sqrt{2}} = \frac{(n\sqrt{2} - \delta + 2n + \delta')}{\sqrt{2}} = \frac{(1+\sqrt{2})n + (\delta' - \delta)}{\sqrt{2}}.$$

Indicando con $\{x\}$ la parte frazionaria del numero reale x e utilizzando la relazione $x = I(x) + \{x\}$, vera per qualsiasi valore di x, si ha:

$$m = \frac{I((1+\sqrt{2})n) + \{(1+\sqrt{2})n\} + (\delta' - \delta)}{\sqrt{2}}.$$

Dato che $(\delta' - \delta)/\sqrt{2}$ è strettamente compreso tra $-1/\sqrt{2}$ e $1/\sqrt{2}$ e che $\{(1+\sqrt{2})n\}$ è strettamente compreso tra 0 e 1, la somma dei

due è strettamente compresa tra $-1/\sqrt{2}$ e $1 + 1/\sqrt{2}$. Ora, la loro somma, pari a $m - I((1 + \sqrt{2})n)$, deve essere un numero intero. Gli unici numeri interi compresi tra $-1/\sqrt{2}$ e $1 + 1/\sqrt{2}$ sono 0 e 1: perciò i casi possibili sono due, $m = I((1 + \sqrt{2})n)$ e $m = I((1 + \sqrt{2})n) + 1$. A questo punto resta solamente da verificare che nessuno di questi valori di m soddisfa la relazione $I(m \cdot \sqrt{2}) = I(n \cdot \sqrt{2}) + 2n$. Cominciamo con il valore $m = I((1 + \sqrt{2})n)$. Abbiamo:

$$\begin{aligned} I(m \cdot \sqrt{2}) = I(I((1 + \sqrt{2})n) \cdot \sqrt{2}) &= I((n + I(n\sqrt{2})) \cdot \sqrt{2}) \\ &= I((n + n\sqrt{2} - \delta) \cdot \sqrt{2}) \\ &= I(n\sqrt{2} + 2n - \delta\sqrt{2}) \\ &= 2n + I(I(n\sqrt{2}) + \delta - \delta\sqrt{2}) \\ &= 2n + I(n\sqrt{2}) + I(\delta - \delta\sqrt{2}) \end{aligned}$$

Dato che δ è compreso tra 0 e 1 (e non è nullo), si ha $I(\delta - \delta\sqrt{2}) < 0$, e quindi $I(m \cdot \sqrt{2}) < 2n + I(n\sqrt{2})$: il primo dei due valori di m, dunque, non va bene.

Vediamo ora cosa succede con $m = I((1 + \sqrt{2})n) + 1$. Questa volta il calcolo, sostanzialmente identico al precedente, porta all'uguaglianza seguente:

$$I(m \cdot \sqrt{2}) = 2n + I(n\sqrt{2}) + I(\delta - \delta\sqrt{2} + \sqrt{2}).$$

Il problema, dunque, diventa quello di dimostrare che $I(\delta - \delta\sqrt{2} + \sqrt{2})$ non è uguale a zero. A tale scopo, basta verificare che $\delta - \delta\sqrt{2} + \sqrt{2} \geq 1$. La disuguaglianza è vera se, e solo se, $\delta(1 - \sqrt{2}) \geq 1 - \sqrt{2}$, cioè se $\delta \leq (1 - \sqrt{2})/(1 - \sqrt{2})$ (il senso della disuguaglianza si inverte perché $1 - \sqrt{2}$ è negativo!), o anche $\delta \leq 1$, che è vera a causa della definizione di δ. Abbiamo concluso con successo la prima tappa.

Seconda tappa: sia N un numero intero strettamente positivo. Gli elementi di A minori o uguali a N sono gli interi che possiamo scrivere nella forma $I(n\sqrt{2})$ (con n intero positivo non nullo) e tali che $I(n\sqrt{2}) \leq N$. Il loro numero, quindi, è pari al numero degli interi n positivi non nulli tali che $n\sqrt{2} < N + 1$, ed è dato da $x = I((N + 1)/\sqrt{2}$ (lasciamo al lettore il compito di verificare che, dato che $(N + 1)/\sqrt{2}$ non è mai intero, essendo $\sqrt{2}$ irrazionale, il valore esatto è proprio questo e non $I((N + 1)/\sqrt{2}) - 1)$. Quanto ai numeri minori o uguali a N della forma $I(n\sqrt{2}) + 2n$, ce ne sono tanti quanti sono gli interi positivi n tali che $n\sqrt{2} + 2n < N + 1$, il che (con un ragionamento simile) fa un totale di $y = I((N + 1)/(2 + \sqrt{2}))$.

Resta quindi da verificare che $x + y = N$, cioè che $I((N+1)/\sqrt{2}) + E((N+1)/(2+\sqrt{2})) = N$. Per farlo, cominciamo a moltiplicare per $(2-\sqrt{2})$ il numeratore e il denominatore della frazione $(N+1)/(2+\sqrt{2})$:

$$\begin{aligned} y = I\left(\frac{(N+1)}{(2+\sqrt{2})}\right) &= I\left(\frac{(N+1)\cdot(2-\sqrt{2})}{2}\right) \\ &= I\left(\frac{(N+1)-(N+1)}{\sqrt{2}}\right) \\ &= N+1-I\left(\frac{(N+1)}{\sqrt{2}}\right)-1 \\ &= N-x. \end{aligned}$$

(Il -1 che compare nella penultima linea proviene dalla relazione $I(-a) = -I(a) - 1$, valida per qualsiasi numero a non intero). Dunque è proprio vero che $x + y = N$, e il teorema è dimostrato.

Una volta enunciato questo teorema, è difficile non chiedersi se è possibile generalizzarlo, in particolare nel modo seguente: dato un numero k intero positivo, esiste un numero u tale che, sostituendo u al posto di $\sqrt{2}$ nella costruzione di A e A', si ottiene una successione delle differenze del tipo k, $2k$, $3k$ ecc.? La risposta è sì, e se si riprendono i calcoli della seconda tappa della dimostrazione precedente si può anche prevedere quale dovrà essere il valore di u. Il procedimento, in sostanza, si basa sull'osservazione che i numeri del tipo $I(n\sqrt{2})$ occupano una proporzione dell'insieme dei numeri interi pari a $1/\sqrt{2}$ (per indicare tale proporzione si parla di *densità*). Dal canto loro, i numeri del tipo $I(n\sqrt{2}) + 2n$, sempre diversi dai precedenti (si veda la tappa numero 1), hanno una densità pari a $1/(2+\sqrt{2})$. Dato che $[1/\sqrt{2}] + [1/(2+\sqrt{2})] = 1$, la densità dell'insieme formato dai numeri di tipo $I(n\sqrt{2})$ e di tipo $I(n\sqrt{2}) + 2n$ è uguale a 1. I calcoli fatti nel corso della seconda tappa sono più precisi, poiché per un dato insieme il fatto di avere densità unitaria non implica necessariamente che l'insieme in questione contenga tutti gli interi (si può verificare, ad esempio, che l'insieme dei numeri interi che non sono quadrati perfetti ha una densità pari a 1, pur non contenendo tutti gli interi). Malgrado tutto, il ragio-

namento sulle densità permette di anticipare il valore di u: se vogliamo che A' corrisponda esattamente all'insieme dei numeri del tipo $I(n \cdot u) + kn$, infatti, è necessario che la somma delle densità di A e dell'insieme dei numeri del tipo $I(n \cdot u) + kn$ sia uguale a 1 (anche se non è sufficiente). Sostituendo il valore 2 con k e il valore $\sqrt{2}$ con u nell'espressione della somma delle densità si ottiene:

$$\left[\frac{1}{u}\right] + \left[\frac{1}{(k+u)}\right] = 1,$$

ovvero:

$$u^2 + (k-2)u - k = 0.$$

Se ci si limita a considerare la soluzione positiva, se ne deduce:

$$u = \frac{2 - k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

Per $k = 1$, si ritrova il numero aureo, $(1 + \sqrt{5})/2$.

Resterebbe da verificare, quindi, che per questi numeri il teorema valga realmente; lasciamo al lettore il compito di verificare che le tappe 1 e 2 ben si adattano a questi nuovi casi per dare il risultato generale.

Al di là del fatto che l'espressione precedente per u consente di vedere che, se si eccettua $\sqrt{2}$, non sono le radici quadrate i numeri da considerare per generalizzare il teorema, bisogna ammettere che in effetti, in questa forma, il risultato è un po' oscuro, e, per dirla tutta, poco elegante. A questo punto è interessante osservare che l'espressione dei numeri quadratici sotto forma di frazione continua può rivelarsi preziosa per svelare i legami che possono esistere tra le soluzioni di un problema. Infatti si può dimostrare, con una serie di calcoli che lasciamo al lettore, che u può essere espresso nel modo seguente:

$$u = [1, k, k, k, k, \ldots]$$

che mette in evidenza con una chiarezza sorprendente la struttura comune a tutte le u... e mostra come in questo contesto di parti intere sia piuttosto il numero aureo che si insedia il primo posto, lasciando il secondo alla radice quadrata di 2.

Tutto ciò deriva da un fatto più generale (di cui non conosciamo l'origine, proprio come prima): se a è un numero irrazionale

maggiore di 1, e se b è tale che $1/a + 1/b = 1$, allora l'insieme A degli interi positivi esprimibili come $I(na)$ è disgiunto dall'insieme B degli interi del tipo $I(nb)$ (con n intero positivo), e l'unione di A e B corrisponde all'insieme di tutti gli interi (esercizio: dedurre quanto si è enunciato qui sopra).

La gerarchia delle divisioni

La più antica definizione che ci sia mai giunta di quello che oggi chiamiamo numero aureo è dovuta a Euclide, che si serviva dell'espressione «divisione in media ed estrema ragione». Dato un segmento AB, la posizione del punto M tale che $AB/AM = AM/MB$ («il grande sta al medio come il medio sta al piccolo) è quella per cui $AB/AM = \varphi$.

Non è difficile determinare lo sviluppo in frazione continua del fattore che determina la divisione in media ed estrema ragione. Si ha infatti $\varphi = AB/AM = (AM + MB)/AM = 1 + MB/AM = 1 + 1/(AM/ /MB) = 1 + 1/(AB/AM)$, dove l'ultima uguaglianza proviene dalla definizione stessa della divisione in media ed estrema ragione. Se ne deduce che $\varphi = 1 + 1/((AM + MB)/AM) = 1 + 1/(1 + 1/(AM/MB))$, da cui, continuando nello stesso modo, $\varphi = 1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/ /1 + \ldots))) = [1, 1, 1, 1, 1, \ldots]$.

David Fowler ha proposto di generalizzare φ nel modo seguente: dato un segmento $[AB]$, prendiamo n suoi punti (che chiameremo $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}, M_n$) tali che $AM_1 = M_1M_2 = \ldots = M_{n-1}M_n$ e tali che $AB/AM_1 = AM_1/M_nB$ (la figura seguente rappresenta il caso in cui $n = 3$).

A M_1 M_2 M_3 B

Si può dire, allora, che il punto M_1 così definito realizza la n-esima divisione in media ed estrema ragione del segmento $[AB]$. Quando $n = 1$ si ritrova la divisione classica in media ed estrema ragione, in cui $M = M_1$ e $AB/AM = \varphi$. Nel caso generale si ha:

$$\frac{AB}{AM_1} = \frac{(AM_n + M_nB)}{AM_1} = \frac{n + M_nB}{AM_1} = \frac{n+1}{\left(\frac{AM_1}{M_nB}\right)} = \frac{n+1}{\left(\frac{AB}{AM_1}\right)} = \dots,$$

da cui si conclude, come nel caso del numero aureo: $AB/AM_1 = [n, n, n, n, \dots]$. Nel seguito chiameremo questa quantità «n-numero aureo; se lo si indica con φ_n, si verifica senza fatica che $\varphi_n = n + 1/\varphi_n$, e quindi che $\varphi_n^2 - n\varphi_n - 1 = 0$. La soluzione di questa equazione di secondo grado è data da $\varphi_n = (n \pm \sqrt{(n^2 + 4)})/2$, cioè, visto che φ_n è positivo, $\varphi_n = (n + \sqrt{(n^2 + 4)})/2$. Nel caso in cui $n = 1$ ritroviamo il numero aureo, $(1 + \sqrt{5})/2$. Quando $n = 2$, si ha $\varphi_2 = (2 + \sqrt{(2^2 + 4)})/2 = 1 + \sqrt{2}$. Dal punto di vista della generalizzazione della divisione in media ed estrema ragione (generalizzazione del tutto «naturale» dal punto di vista delle frazioni continue in virtù della relazione $\varphi_n = [n, n, n, \dots]$), la radice quadrata di 2, o, per essere più precisi, il suo avatar $\sqrt{2} + 1$, sembra arrivare seconda, subito dopo il numero aureo.

Un'eterna seconda?

Tutto quello che è legato alla nozione di frazione continua o di approssimazioni razionali, dunque, sembra congiurare in maniera irresistibile affinché il numero aureo diventi la costante matematica più illustre. E quando la radice quadrata di 2 cerca di rivaleggiare, come nel caso della divisione in media ed estrema ragione, finisce invariabilmente al secondo posto. Che succede, allora, nel campo delle altre rappresentazioni dei numeri che abbiamo incontrato?

Sul fronte delle frazioni continue ascendenti, il verdetto non è così univoco. La frazione continua ascendente che si ottiene applicando il metodo di Newton (vedi cap. 14) alla funzione $f(x) = x^2 - x - 1$ (che ha il numero aureo tra le radici) mostra dei «quozienti parziali ascendenti» che crescono con la stessa velocità di quelli della radice quadrata di 2. In pratica, nel campo delle frazioni continue ascendenti né φ né $\sqrt{2}$ ricoprono un ruolo particolarmente privilegiato: il numero «più estremo», da questo punto di vista, quello i cui «quozienti parziali ascendenti» crescono più lentamen-

te (per evitare spiagge di stagnazione arbitrariamente lunghe, imponiamo che la successione sia strettamente crescente), è pari a:

$$1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\cfrac{1+\dots}{4}}{3}}{2}}{1}$$

Il numero in questione non è altro che *e*, la base dei logaritmi neperiani (vedi cap. 12).

E per le rappresentazioni sturmiane? Dato che le successioni a ricorrenza lineare intervengono nella rappresentazione della radice quadrata di 2, il lettore non sarà affatto sorpreso di vedere lo stesso fenomeno ripetersi per il numero aureo, il quale, una volta di più, si dimostra più «semplice», più «estremo». La rappresentazione di φ è ottenibile attraverso una sostituzione più «economica» di quella utilizzata per $\sqrt{2}$: ogni 0 diventa 01, ogni 1 diventa 0, e così via, fino ad ottenere 01000101001001... Il lettore potrà verificare che le proprietà evidenziate nel capitolo 20 a proposito della rappresentazione di $\sqrt{2}$ possono essere adattate al caso di φ. In particolare, il numero di 0 o di 1 ad ogni passo della sostituzione è un numero della successione di Fibonacci (1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21...).

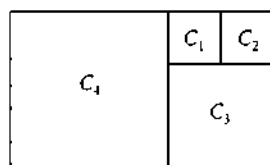
Dalla divisione in media ed estrema ragione alle frazioni continue, passando per le rappresentazioni sturmiane o anche per le differenze tra le successioni di Kronecker associate a $\sqrt{2}$ e a φ, sembra proprio che il destino della radice quadrata di 2 sia quello di restare confinata sul secondo gradino del podio, dato che il primo è di esclusiva proprietà dello zar. Eppure, come vedremo nel prossimo capitolo, la radice quadrata di 2 è ben lungi dall'aver detto l'ultima parola.

24.

Duello al vertice II
La rivincita di $\sqrt{2}$

Primo assalto

L'argomento principale che spinge ad attribuire al numero aureo il titolo di «irrazionale estremo» deriva dal fatto che, come abbiamo visto nel capitolo precedente, è il numero con i quozienti parziali più piccoli. Per avere tutti i quozienti parziali uguali a 1, però, è necessario fare delle concessioni sul piano della regolarità, come ci mostra la costruzione geometrica seguente. Partiamo da un quadrato C_1 di lato unitario; al suo fianco, disegniamo un secondo quadrato C_2, identico al primo, così da formare un «domino» la cui lunghezza (uguale a 2) definisce il lato del quadrato C_3 sottostante. La lunghezza del rettangolo formato dall'unione di C_1, C_2 e C_3 serve a sua volta per costruire un quadrato C_4, e così via.

C_1 C_2
C_4
C_3

Con un esercizio che lasciamo al lettore, è possibile dimostrare che le lunghezze dei lati dei rettangoli costruiti con questo procedimento corrispondono a termini adiacenti della successione di Fibonacci: 1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 ecc. In altri termini, la lunghezza e la larghezza di ogni rettangolo ci danno il numeratore e il denominatore delle ridotte del numero aureo.

La costruzione equivalente che dà i numeratori e i denominatori delle ridotte di $1 + \sqrt{2}$ consiste nel partire da due quadrati C_1 e C_1' identici e mettere, a ogni passaggio, due nuovi quadrati anziché uno solo.

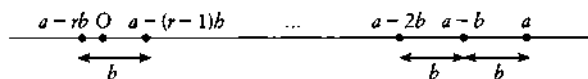
Dato che rappresentano la successione delle ridotte, rispettivamente, di φ e di $1 + \sqrt{2}$, le due figure costituiscono una materializzazione geometrica delle approssimazioni razionali successive dei due numeri, e permettono quindi di riconsiderare in maniera elementare la questione relativa a quale dei due «viene prima».

Il numero aureo ha dalla sua il fatto che a ogni tappa viene aggiunto un solo quadrato, mentre per $1 + \sqrt{2}$ ce ne vogliono due. Al tempo stesso, però, la prima tappa della costruzione dei rettangoli per φ porta a mettere due volte di fila lo stesso quadrato, rendendo la figura meno «armoniosa» di quella associata a $1 + \sqrt{2}$, dove i quadrati si presentano sempre in coppia. Questo particolare si traduce nel fatto che per scrivere le approssimazioni di $1 + \sqrt{2}$ derivanti dal suo sviluppo in frazione continua si usano effettivamente dei 2 (ad esempio, $2 + 1/(2 + 1/(2 + 1/2))$ per 29/12) mentre quelle corrispondenti al numero aureo non hanno degli 1 fino in fondo: 13/8, ad esempio, si scrive in realtà $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/2)))$ – certo, lo si può scrivere nella forma $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/1))))$, ma il lettore potrà verificare che non si tratta dello sviluppo prodotto dall'applicazione dell'algoritmo di Euclide a 13/8.

La presenza degli 1 nel suo sviluppo in frazione continua, dunque, spiega questa leggera «imperfezione» del numero aureo. Indubbiamente questo non può bastare a invertire la tendenza che si è delineata nel capitolo precedente, ma vedremo che i problemi associati a questi 1 si spingono oltre. Dal punto di vista dell'algoritmo di Euclide, la semplice relazione $1 + 1/1 = 2$ è un cavallo di Troia che permetterà alla radice quadrata di 2 di contendere in maniera inaspettata al numero aureo il titolo di irrazionale estremo.

La seconda battaglia delle frazioni continue

Sia che le consideriamo come il frutto di un procedimento geometrico (l'antiferesi) o come una successione di operazioni puramente algebriche, le frazioni continue si basano su un unico algoritmo iniziale, l'algoritmo di Euclide, il cui punto di partenza è la divisione euclidea. Quest'ultima, ricordiamo, consiste nel sottrarre il valore del divisore, b, al valore del dividendo, a, il maggior numero possibile di volte, in modo che il resto r sia compreso tra 0 e $b - 1$. Nel linguaggio fuori moda dei «calcoli a parole»: «a contiene b n volte, con il resto di r», ovvero $a = q \cdot b + r$, dove q è il numero (intero) di volte che b ha potuto essere sottratto da a. La divisione euclidea, quindi, produce ogni volta un resto r, la cui caratteristica fondamentale è di essere compreso tra 0 e $b - 1$: è così che, ripetendo il procedimento a partire da b e da r, si riescono ad avere dei numeri sempre più prossimi a zero una tappa dopo l'altra, ed è questa la ragione di fondo che garantisce che le ridotte si avvicinino sempre di più al valore limite «giusto» (contrariamente a quanto capita in altri casi – vedi cap. 17).

A questo punto possiamo fare un'osservazione che, con il senno di poi, potrà sembrare di puro buon senso: per avere dei resti che tendono a zero non è necessario che siano compresi tra 0 e $b - 1$: basta che siano compresi tra $-b + 1$ e $b - 1$. Possiamo essere un po' più precisi, e definire una nuova divisione euclidea nel modo seguente: la divisione di a per b si effettua sottraendo b da a finché si può, *ma fermandosi al punto più vicino a zero*, il che porta a un resto che non è per forza positivo, ma è compreso tra $-b/2$ e $b/2$.

Per un matematico come Euclide, che vedeva spesso i numeri attraverso la geometria, i numeri negativi non avevano diritto di cittadinanza – un diritto, d'altronde, che hanno conquistato in maniera definitiva solo nel XIX secolo, cioè tardissimo. Questa forma alternativa di divisione euclidea, conosciuta come «divisione eucli-

dea simmetrica», era dunque difficile da concepire. Tuttavia, visto che, generalmente, i suoi resti si avvicinano a zero più rapidamente di quelli della divisione classica, la divisione simmetrica permette di guadagnare tempo nella ricerca del massimo comun divisore. A titolo di esempio, ecco cosa danno l'algoritmo di Euclide e l'algoritmo di Euclide simmetrico nel caso di 29/8:

algoritmo classico	algoritmo simmetrico
$29 = 3 \times 8 + 5$	$29 = 4 \times 8 + 3$
$8 = 1 \times 5 + 3$	$8 = 3 \times 3 - 1$
$5 = 1 + \times 3 + 2$	$3 = 3 \times 1 + 0$
$3 = 1 \times 2 + 1$	
$2 = 2 \times 1 + 0$	

Se ne deducono due tipi di espressione continua per il rapporto 29/8:

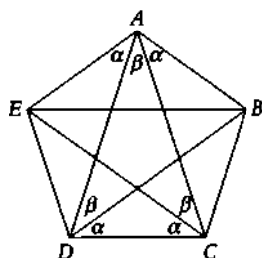
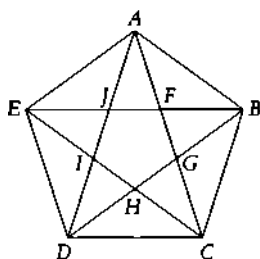
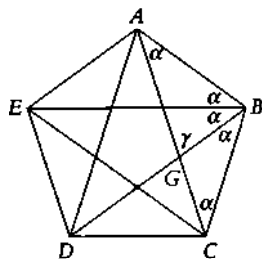
$$\frac{29}{8} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}} \qquad \frac{29}{8} = 4 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3}}$$

formula per l'algoritmo classico — formula per l'algoritmo simmetrico

Abbiamo a disposizione, quindi, un modo nuovo per definire le frazioni continue, altrettanto «legittimo» di quello che abbiamo definito nel capitolo 17. Con altre varianti dell'algoritmo di Euclide si possono ottenere frazioni continue ancora differenti, come quelle dette «giapponesi», costruite su un algoritmo di Euclide che si basa su un resto r compreso tra αb e $(\alpha - 1)b$ (dove α è un coefficiente prefissato e compreso tra -1 e 1). Di tutti gli algoritmi, quello simmetrico ha dalla sua il fatto di essere... simmetrico, appunto, cioè di essere, in un certo senso, il più «naturale» di tutti; e a parte casi eccezionali, è anche il più rapido a trovare il massimo comun divisore tra due numeri interi.

Per studiare e paragonare gli irrazionali, dunque, l'utilizzo dello sviluppo in frazione continua simmetrica è altrettanto legittimo di quello delle frazioni continue ordinarie. Con questo nuovo algoritmo, le carte in mano ai numeri irrazionali cambiano.

Degli 1 che diventano dei 3

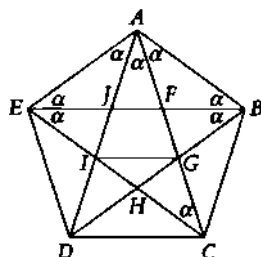
Il fatto che talvolta l'algoritmo di Euclide simmetrico conduca a delle quantità negative non deve dissuadere dal darne una versione geometrica; anzi, può essere l'occasione di rivisitare alcuni esempi classici. Quello che ci interessa riguarda il rapporto tra la diagonale e il lato del pentagono regolare, che è uguale al numero aureo. Il ragionamento che stiamo per illustrare, e di cui non è necessario leggere i dettagli per capire il seguito, è un adattamento di un ragionamento geometrico proposto nel 1945 da Kurt von Fritz, e che abbiamo già menzionato nel capitolo 17 a proposito della nozione di antiferesi.

Partiamo da un pentagono regolare $ABCDE$, e attraverso una «antiferesi simmetrica» determiniamo lo sviluppo in frazione continua simmetrica del rapporto AC/AB, che non è altro che il numero aureo. A tale scopo, abbiamo bisogno di due risultati sui pentagoni regolari (le loro dimostrazioni sono illustrate nell'inserto): le lunghezze AB e AG sono uguali, e sono uguali le lunghezze AF e FH.

Dimostrazione delle relazioni tra le lunghezze nel pentagono regolare
Cominciamo con un risultato intermedio sugli angoli. Lemma: gli angoli $C\hat{A}B$ e $C\hat{A}D$ sono entrambi uguali a $\pi/5$ (NB: tutti gli angoli sono misurati in radianti).

Dimostrazione del lemma Indichiamo con α l'angolo $C\hat{A}B$ e con β l'angolo $C\hat{A}D$. La simmetria del pentagono regolare permette di ritrovare α e β in vari punti della figura.

L'angolo tra due lati adiacenti di un poligono regolare a n lati è di $\pi - 2\pi/n$. La somma $\alpha + \beta + \alpha$ (cioè l'angolo $E\hat{A}B$) è quindi uguale a $\pi - 2\pi/5 = 3\pi/5$, e dunque $\beta = 3\pi/5 - 2\alpha$. D'altra parte, dato che la somma degli angoli del triangolo ACD è uguale a π, si ha $3\beta + 2\alpha = \pi$. Sostituendo β con la sua espressione in funzione di α si ottiene quindi $3(3\pi/5 - 2\alpha) + 2\alpha = \pi$, da cui si ricava $\alpha = \pi/5$. Sostituendo $\pi/5$ ad α nella relazione $\beta = 3\pi/5 - 2\alpha$ si trova che anche β è uguale a $\pi/5$, come volevasi dimostrare.
Adesso possiamo dimostrare i risultati che avevamo annunciato nel testo.

Dimostrazione dell'uguaglianza $AB = AG$ Il lemma ci indica che possiamo trovare l'angolo α nei punti seguenti del pentagono.

La somma degli angoli del triangolo AGB è uguale a π, e quindi $3\alpha + \gamma = \pi$. Dato che $\alpha = \pi/5$, si ottiene $\gamma = 2\pi/5$: nel triangolo AGB, dunque, l'angolo in G è uguale all'angolo in B (a sua volta uguale ad $\alpha + \alpha = 2\pi/5$), e il triangolo AGB è isoscele in A, da cui $AB = AG$, come volevasi dimostrare.

Dimostrazione dell'uguaglianza $AF = FH$ La simmetria del pentagono ci permette di dire che AF è uguale a GC, e che FH è uguale a

GI. Ai fini del nostro lemma, quindi, è equivalente dimostrare che $GC = GI$.

Per simmetria, le rette (*AB*) e (*EC*) sono parallele, così come (*AE*) e (*BD*). Perciò il quadrilatero *ABHE*, che ha i lati opposti paralleli, è un parallelogramma (è addirittura un rombo, visto che $AE = AB$). L'angolo in *H*, dunque, è uguale all'angolo in *A*, e vale 3α, ovvero $3\pi/5$.
Sempre per la simmetria del pentagono, nel triangolo *GHI* gli angoli in *I* e in *G* sono uguali. Dato che la somma degli angoli del triangolo *GHI* è uguale a π, se ne deduce che l'angolo in *I* del triangolo suddetto è uguale a $[\pi - 3\pi/5]/2 = \pi/5 = \alpha$. Nel triangolo *CIG*, dunque, gli angoli in *C* e in *I* sono uguali (a α), e il triangolo *CIG* è isoscele in *G*, da cui $GC = GI$, come volevasi dimostrare.

Forti delle eleganti proprietà del pentagono regolare, possiamo lanciarci nell'applicazione dell'antiferesi simmetrica alle lunghezze *AC* e *AB*. Si tratta, anzitutto, di determinare il numero n di volte che la lunghezza *AB* è contenuta nella lunghezza *AC*, tenendo presente la formula della divisione euclidea di *AC* per *AB*, cioè $AC = n \cdot AB + r$; la differenza essenziale rispetto alla divisione ordinaria è che la relazione che chiediamo a r di soddisfare non è $0 \leq r < AB$, tipica di una divisione classica (lo si potrebbe fare, e d'altronde è la scelta fatta in origine da von Fritz), ma $-AB/2 < r \leq AB/2$.

Dall'uguaglianza $AB = AG$ si deduce che $AC = AG + GC = AB + GC$: dato che *GC* è minore di *AB*, se seguissimo l'antiferesi classica diremmo che *AB* è contenuto in *AC* una volta sola, e che il resto è rappresentato dalla lunghezza *GC*. Ma dal momento che stiamo

applicando l'antiferesi simmetrica, dobbiamo osservare che la lunghezza GC è maggiore della metà di AB, e che quindi bisogna sottrarre il segmento AB un'altra volta. Ora, sempre per la relazione $AB = AG$ (e per la simmetria del pentagono regolare), si ha $AB = FC$; sottraendo la lunghezza FC alla lunghezza GC dà «l'opposto» della lunghezza FG (la quale, dal canto suo, è minore della metà di AB). La prima tappa dell'antiferesi simmetrica, dunque, ci porta alla relazione seguente: $AC = 2 \cdot AB - FG$.

La tappa successiva consiste nel valutare quante volte FG è contenuta in AB, o, in maniera equivalente, in AG (essendo sempre $AB = AG$). A tale scopo, cominciamo dall'uguaglianza $AG = AF + FG$, che ci riporta a chiederci quante volte FG è contenuta in AF. In base al terzo lemma, $AF = FH$: contare quante volte FG sta in AG, dunque, equivale a contare quante volte FG è contenuta in FH (con l'aggiunta di 1); di fatto, quest'ultimo calcolo non è altro che il conto di quante volte il lato del pentagono regolare $FGHIJ$ è contenuto nella sua diagonale. Dal punto di vista dell'antiferesi simmetrica, ecco la risposta: 2, sulla base del lavoro fatto in precedenza su AB e AC. Otteniamo così, infine, che FG è contenuta $1 + 2 = 3$ volte in AB, e il seguito dell'antiferesi riproduce in maniera identica il ragionamento precedente, visto che la situazione geometrica è tornata al punto di partenza (su scala più piccola). Raggruppando i risultati ottenuti, quindi, abbiamo:

$$\varphi = 2 - \cfrac{1}{1 + \left(2 - \cfrac{1}{1 + \left(2 - \cfrac{1}{1 + (2 - \ldots)}\right)}\right)} = 2 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 - \ldots}}}}$$

Il cambiamento è alquanto inatteso: i quozienti parziali fanno, per così dire, un «salto» verso un valore, 3, che non ha più nulla del carattere minimale degli 1 nell'espressione $\varphi = 1 + 1/(1 + /(1 + + 1/1 + \ldots))$; tra l'altro, la bella regolarità di tutti questi quozienti parziali identici gli uni agli altri è rovinata dall'apparizione del 2 iniziale.

Com'è possibile, quindi, che l'espressione del numero aureo venga trasformata a tal punto da un semplice cambiamento nell'algo-

ritmo? La spiegazione ci riconduce al valore 1 dei quozienti parziali del numero aureo, che già ci aveva posto qualche problema all'inizio del capitolo: se è vero che le frazioni continue classiche possono tollerare che si scriva $1 + 1/(1 + 1/1)$ al posto di $1 + 1/2$, l'algoritmo simmetrico, invece, non permette operazioni del genere. Si può dimostrare che, qualunque numero si prenda in esame, i suoi quozienti parziali, quando sono generati dall'algoritmo simmetrico, non sono mai uguali a 1 (salvo, eventualmente, il primo). Lasciamo al lettore la libertà di scoprire da solo il fatto che il loro valore, per la precisione, non possa essere minore di 2, e anche che il 2 può esserci solo se è seguito, nella frazione continua, da un segno + (anche qui, a eccezione, eventualmente, del primo).

La radice quadrata di 2, quindi, può fare il suo grande rientro sulla scena: un calcolo elementare ci mostra che il suo sviluppo in frazione continua simmetrica è uguale a quello in frazione continua ordinaria: $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + 1/(2 + \ldots))))$. Da tutto ciò possiamo concludere che l'irrazionale più speciale, dal punto di vista delle frazioni continue simmetriche, è proprio la radice quadrata di 2, poiché è lei che ha i quozienti parziali più piccoli.

L'arbitraggio di π

Questo «grande ritorno», però, presenta qualche inconveniente: ha a che fare più con il numero $1 + \sqrt{2}$ (o, se proprio vogliamo, $\sqrt{2} - 1$) che con la radice quadrata di 2 vera e propria. Nel caso che analizzeremo adesso, invece, ci occuperemo proprio di $\sqrt{2}$, che vedremo prendere il sopravvento sul numero aureo: stiamo per parlare di trigonometria.

Prendiamo la successione dei poligoni regolari: triangolo equilatero, quadrato, pentagono, esagono ecc. Immaginiamo che siano tutti inscritti in un cerchio di raggio unitario, e analizziamo la lunghezza del segmento che unisce il centro del poligono al punto medio di uno dei lati (tale segmento è detto «apotema»). Conoscendo la funzione coseno, si dimostra facilmente che la lunghezza dell'apotema di un poligono regolare a n lati è pari a $\cos(\pi/n)$. Se ne deduce che il diametro del cerchio inscritto in quel medesimo poligono è lungo $2\cos(\pi/n)$. Per i primi valori di n, abbiamo:

$n = 3$ (triangolo equilatero): $2\cos(\pi/3) = 1$
$n = 4$ (quadrato): $2\cos(\pi/4) = \sqrt{2}$
$n = 5$ (pentagono regolare): $2\cos(\pi/5) = (1 + \sqrt{5})/2 = \varphi$
$n = 6$ (esagono regolare): $2\cos(\pi/6) = \sqrt{3}$

Come possiamo vedere da questa lista, nell'ordine logico dei poligoni regolari il quadrato viene prima del pentagono, e $\sqrt{2}$ diventa il «primo irrazionale», seguito da φ.

I numeri $2\cos(\pi/n)$ alla base di questo «arbitraggio» tra le due costanti svolto dal numero pi greco sono utilizzati in svariati settori della matematica, dalla «teoria dei nodi» alle «algebre di Lie», il cui approfondimento, però, ci porterebbe via troppo tempo. Li ritroviamo anche nelle «frazioni continue di Rosen», una variante delle frazioni continue in cui i quozienti parziali non sono interi, ma multipli interi di una «base» del tipo $2\cos(\pi/n)$ (i quozienti parziali di una «$2\cos(\pi/n)$-frazione continua di Rosen», quindi, sono del tipo $k \cdot 2\cos(\pi/n)$, con k intero qualunque; quando $n = 3$ si ritrovano le frazioni continue a quozienti parziali interi). Ecco un esempio di una frazione continua del genere, con $n = 4$:

$$\sqrt{3} = \sqrt{2} + \cfrac{1}{2\sqrt{2} + \cfrac{1}{2\sqrt{2} + \cfrac{1}{2\sqrt{2} + \cfrac{1}{2\sqrt{2} + \dots}}}}$$

Per dimostrare questa uguaglianza il lettore potrà servirsi dell'algebra, oppure potrà considerare un triangolo rettangolo i cui lati sono lunghi, rispettivamente, 1, $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$, e applicare lo stesso ragionamento seguito nel capitolo 17, grazie al quale eravamo giunti a ottenere lo sviluppo in frazione continua della radice quadrata di 2. Si noti che moltiplicando ambo i membri per $\sqrt{2}$ si ottiene lo sviluppo in frazione continua «ordinaria» di $\sqrt{6}$, e che dividendo per 2 si ottiene quello di $\sqrt{(3/2)}$:

$$\sqrt{6} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \dots}}}} \qquad \sqrt{(3/2)} = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1+}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}}$$

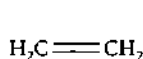
Contrariamente a ciò che potrebbero lasciar intendere questi due esempi (per ritrovarsi con delle funzioni continue ordinarie basta moltiplicare o dividere per $\sqrt{2}$), lo studio delle frazioni continue di Rosen è difficile, poiché richiede l'utilizzo di strumenti della «geometria iperbolica». D'altra parte è proprio in questo contesto (che per il momento dobbiamo abbandonare, ma sul quale ritorneremo brevemente in seguito) che Rosen le ha introdotte, nel 1954.

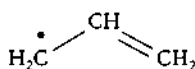
Le molecole prendono posizione

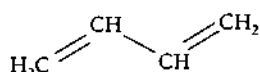
I numeri del tipo $2\cos(\pi/n)$, che spingono la radice quadrata di 2 in cima alla piramide dei numeri, hanno un ruolo anche in un contesto decisamente più inaspettato, quello degli «orbitali molecolari». Data una molecola, si tratta di capire come si comportano gli elettroni dei vari atomi.

Con l'avvento della fisica quantistica, agli inizi del XX secolo, si è smesso di rappresentare gli elettroni come microscopiche biglie elettricamente cariche, e si è cominciato a parlare di «funzione d'onda». Un primo, semplice modo di spiegare di cosa si tratta consiste nel dire che la funzione d'onda Ψ di un elettrone associa a ogni punto M dello spazio la probabilità che l'elettrone si trovi proprio in quel punto M. Una simile definizione, tuttavia, è semplicistica: non si tratta, infatti, della probabilità di trovarsi esattamente in M, ma piuttosto di essere in una «prossimità infinitesima» di M. Dividiamo lo spazio in un'infinità di cubi minuscoli; di tutti i cubi, quello che contiene M è una prossimità infinitesima di M, e il suo volume si indica con dM. Per conoscere la probabilità che ha un elettrone di trovarsi in tale o talaltra regione dello spazio, basta sommare tra di loro le probabilità di trovare l'elettrone in ciascuno dei piccolissimi cubi contenuti nella regione considerata (gli intenditori avranno riconosciuto l'operazione che corrisponde a «integrare una densità di probabilità su una regione dello spazio»).

L'interpretazione attualmente dominante di questa descrizione, nota come «interpretazione di Copenhagen», è che la funzione d'onda non rappresenta un mezzo comodo per mascherare dietro alle probabilità la nostra ignoranza della posizione reale dell'elettrone: l'elettrone *è* una funzione d'onda (precisiamo anche che, volendo

essere rigorosi, la funzione probabilità di posizione di un elettrone non è la funzione d'onda in sé, ma il «quadrato del suo modulo»; per quello che interessa a noi, però, una distinzione del genere non ha grande importanza).

Descrivere la posizione di un elettrone, dunque, equivale a descrivere la sua funzione d'onda. Quest'ultima è soluzione dell'«equazione di Schrödinger», che possiamo scrivere come $H(\Psi) = E \cdot \Psi$, dove H è un «operatore» (cioè una «macchina» che trasforma una funzione in un'altra), di cui non occorre che parliamo in dettaglio, ed E rappresenta un'energia. L'equazione di Schrödinger ci dice che la funzione d'onda Ψ è una «autofunzione dell'operatore H», dato che, applicandole l'operatore H, Ψ non cambia, a meno di un fattore moltiplicativo, E, che viene detto «autovalore» di H.

Come si fa a determinare le caratteristiche dell'orbitale di un elettrone in una data molecola? In altri termini, come determinare l'autofunzione Ψ e l'autovalore E dell'operatore H che rappresenta il sistema fisico (l'atomo, o la molecola) in questione? La domanda è estremamente difficile, e la risposta è nota solo per casi molto semplici. Esaminiamo un aspetto particolare di uno di questi casi: determinare i valori possibili di E per una categoria particolare di molecole, i «polieni coniugati lineari».

Una legge classica della chimica insegna che, dato un insieme di atomi, questi possono unirsi in una molecola solo se gli elettroni periferici di ogni atomo possono legarsi a un elettrone periferico di uno degli altri atomi. Un atomo di carbonio possiede quattro elettroni periferici, mentre un atomo di idrogeno ne possiede uno solo. Il tipo di molecola che ci interessa è formata da una catena di atomi di carbonio, uniti tra di loro da «legami semplici» (un elettrone periferico di un atomo si lega a un elettrone periferico di un altro atomo), rappresentati da un trattino, o da «legami doppi» (due elettroni periferici di un atomo si legano a due elettroni periferici di un altro atomo), rappresentati da due trattini paralleli; nella catena vi è alternanza tra legami semplici e legami doppi. Gli elettroni periferici restanti, che non si legano agli elettroni periferici di altri atomi di carbonio della catena, finiscono per associarsi a un atomo di idrogeno.

I primi rappresentanti della famiglia dei polieni coniugati lineari sono l'*etilene*, l'*allile* e il *butadiene*, formati rispettivamente da

una catena di due, tre e quattro atomi di carbonio, circondata a sua volta da quattro, cinque e sei atomi di idrogeno.

$H_2C{=}CH_2$ — Etilene

$H_2\dot{C}{-}CH{=}CH_2$ — Allile

$H_2C{=}CH{-}CH{=}CH_2$ — Butadiene

Etilene, allile, butadiene. Nel caso dell'allile, uno degli elettroni periferici di uno degli atomi di carbonio non è legato ad altri elettroni (più che una molecola, l'allile è un «radicale», che tende ad attaccarsi a un altro radicale grazie a questo elettrone isolato, che nella figura è rappresentato da un punto).

Come per tutte le molecole, la funzione d'onda di un elettrone i periferico (dal punto di vista delle funzioni d'onda, interessano solo gli elettroni periferici) di uno dei nostri atomi di carbonio è legata a quelle degli altri atomi della molecola, così come l'energia E corrispondente. Nel 1930, Erich Hückel ha proposto un modello classico per lo studio delle molecole precedenti, trovando un compromesso tra semplicità e realismo (per i suoi dettagli, che richiedono conoscenze matematiche ben precise, si veda l'inserto successivo).

Si può dimostrare che, nell'ambito di questo modello, i valori possibili per E sono tanti quanti gli atomi di carbonio nella catena, e sono esprimibili nella forma $\alpha + 2\cos(j\pi/(n+1)) \cdot \beta$, dove α e β sono energie di interazione e j rappresenta gli interi da 1 a n. I valori di E associati ai primi polieni coniugati lineari sono i seguenti:
- Etilene ($n = 2$): $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$;
- Allile ($n = 3$): $\alpha + \sqrt{2} \cdot \beta$, α e $\alpha - \sqrt{2} \cdot \beta$;
- Butadiene ($n = 4$): $\alpha + \varphi \cdot \beta$, $\alpha + (1/\varphi) \cdot \beta$, $\alpha - (1/\varphi) \cdot \beta$, $\alpha - \varphi \cdot \beta$ (dove φ indica il numero aureo).

La determinazione di E_i nel modello di Hückel Dato un elettrone i, cerchiamo il valore E_i che soddisfa l'equazione di Schrödinger $H(\Psi_i) = E_i\Psi_i$. Nel modello, la funzione d'onda Ψ_i è una combinazione lineare di φ_j, dove ogni φ_j è la funzione d'onda di un elettrone j che supponiamo isolato dal resto dell'universo. Stiamo pren-

dendo in considerazione gli elettroni j che, nella molecola in esame, sono «i più liberi di avere un effetto su i»: ciò esclude quelli che fanno parte di un legame semplice; i componenti di un legame doppio, invece, non sono equivalenti: uno dei due è una sorta di «saldatura», paragonabile a quella di un legame semplice, mentre l'altro è più debole. Perciò si considerano solo gli elettroni di questo ultimo tipo di legame, che sono n in tutto (per n pari, ci sono $n/2$ legami doppi, ognuno dei quali coinvolge due elettroni; per n dispari, ce ne sono $(n-1)/2$, cioè, in tutto, $n-1$ elettroni, ai quali va aggiunto l'elettrone isolato al fondo della catena, come nel caso dell'allile).
L'espressione matematica di tutto ciò ci dice che esistono dei coefficienti c_{ij} tali che $\Psi_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,\varphi_j$.
Sostituiamo questa espressione al posto di Ψ_i nell'equazione di Schrödinger, sfruttando il fatto che l'operatore H è lineare (cioè $H(f + ag) = H(f) + aH(g)$ per qualsiasi coppia di funzioni f e g e per qualsiasi numero a), e moltiplichiamo ambo i membri dell'uguaglianza per φ_k, dove k è uno dei nostri n elettroni. Con un po' di sforzo, arriviamo alla relazione

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \varphi_k H(\varphi_j) = E_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \varphi_k \varphi_j$$

A questo punto integriamo su tutto lo spazio per ottenere la relazione seguente (che sfrutta la linearità dell'integrale):

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \left[\int (\varphi_k H(\varphi_j))(M) \cdot \mathrm{d}M\right] = E_i \cdot \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \left[\int (\varphi_k \varphi_j)(M) \cdot \mathrm{d}M\right]$$

Il termine tra parentesi quadre nel membro di sinistra, che possiamo anche indicare con H_{jk}, corrisponde più o meno a un'energia di interazione tra gli elettroni j e k. Nel modello di Hückel, H_{jk} è pari a un valore α quando $j = k$, a un valore β quando j e k sono due elettroni appartenenti ad atomi di carbonio adiacenti nella catena, e a 0 in tutti gli altri casi.
Il termine in parentesi quadra nel membro di destra, dal canto suo, è «l'integrale di ricoprimento». Nel modello di Hückel, si suppone che quando gli elettroni j e k sono distinti tale integrale sia nullo, e che sia uguale a 1 quando $k = j$. Per farla breve, diciamo che questa

affermazione rende conto del fatto che, per definizione, φ_j e φ_k rappresentano elettroni indipendenti dall'ambiente circostante e che quindi non si «influenzano» a vicenda (questa assunzione costituisce la semplificazione più evidente introdotta dal modello). L'integrale di ricoprimento tra j e k, quindi, può essere rappresentato dal «simbolo di Kronecker», δ_{jk}, che vale 1 se $j = k$ e 0 in tutti gli altri casi.

Raggruppando tutti i termini su un unico lato dell'uguaglianza, otteniamo infine:

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij}(H_{kj} - E_i\delta_{kj}) = 0$$

Questa relazione vale per tutti gli elettroni k. Facendo variare k, troviamo n equazioni lineari come la precedente, e possiamo considerare i coefficienti c_{ij} come le incognite del sistema così ottenuto. Dato che, per ragioni fisiche, i coefficienti non possono essere tutti nulli, siamo di fronte a un sistema lineare degenere, cioè il cui determinante è nullo.

Perciò, se sostituiamo H_{kj} con α quando $j = k$, con β quando j e k corrispondono a due elettroni adiacenti, e con 0 negli altri casi, il fatto che il determinante sia nullo indica che E_i è un auto valore della seguente matrice quadrata $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & 0 & \dots & 0 \\ \beta & \alpha & \beta & \ddots & \vdots \\ 0 & \beta & \alpha & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \beta \\ 0 & \dots & 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

Ragionando in maniera ricorsiva, quindi, possiamo dimostrare che gli autovalori sono i numeri del tipo $\alpha + 2\cos(2j\pi/(n+1)) \cdot \beta$, dove j varia da 1 a n. Tali valori corrispondono ai livelli di energia accessibili agli elettroni. Nonostante le sue stime quantitative di questi livelli siano poco affidabili, il modello di Hückel funziona decisamente meglio nella descrizione dei salti energetici (le differenze tra gli autovalori).

Un impero diviso

Allora, tra il numero aureo e la radice quadrata di 2, qual è il «migliore»? Se nella trigonometria è la radice di 2 a imporre la propria superiorità, il terreno delle frazioni continue resta diviso. Il vantaggio preso da $\sqrt{2}$ con le frazioni continue simmetriche, infatti, non è tale da garantire una vittoria definitiva: sebbene sia «più equilibrato», l'algoritmo di Euclide simmetrico presenta lacune teoriche dalle quali l'algoritmo classico risulta immune. In particolare, l'algoritmo di Stern-Brocot, che abbiamo visto nel capitolo 18 e che dà l'approssimazione più «naturale» di un numero attraverso delle frazioni, è legato alle frazioni continue, e non a quelle simmetriche. Queste ultime, per quanto possano apparire più «naturali», in realtà non lo sono così tanto, anche se è difficile capirne davvero la ragione. Analogamente, sono le frazioni continue ordinarie che servono a dare la lista dei numeri x tali che la successione delle parti intere dei multipli di x presenta le proprietà notevoli viste nel capitolo precedente (il lettore potrà verificare che se si sostituisce alla parte intera $I(x)$ la funzione «intero più vicino» non si ottiene nulla di particolare).

Il punto di vista più globale sulle frazioni continue, quello della «geometria iperbolica», permette di riconsiderare le questioni relative al numero irrazionale estremo in termini di «geodetica di lunghezza minima sulla superficie modulare», il cui verdetto va a favore di... $\varphi + 1$, il cui sviluppo in frazione continua comincia con un 2 e prosegue con un'infinità di 1, in una sorta di immagine in negativo dello sviluppo in frazione continua di $\sqrt{2}$ che dà un vantaggio nettissimo al numero aureo.

In ogni caso, il legame tra queste due costanti fondamentali della matematica è così profondo che è difficile decidere una volta per tutte quale sia la più importante. D'altronde, non è neanche il caso di dare troppa importanza all'artificio stilistico che ci ha fatto mettere in scena un «duello». Oppure dobbiamo riconoscere che il duello si conclude con la vittoria di entrambi i protagonisti, perché è valorizzandosi reciprocamente che la radice quadrata di 2 e il numero aureo riescono a essere partecipi, insieme, della bellezza della matematica.

Appendice alla parte sesta

Qualche bella formula

Quelle che stiamo per presentare, senza dimostrarle, sono alcune belle formule in cui compare la radice quadrata di 2. Il lettore potrà cercare di dimostrarle da solo, servendosi delle indicazioni che le accompagnano, o, più semplicemente, potrà lasciare che i suoi occhi si riempiano di meraviglia per la loro bellezza – ma una cosa non esclude l'altra.

Qualche formula proveniente dalla trigonometria

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{(\sqrt{(2+\sqrt{2})})}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{(\sqrt{(2+\sqrt{2})})}{2}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{(\sqrt{(2-\sqrt{2})})}{2} \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2})}{2}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\left(\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{2})})}\right)}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{16}\right)=\frac{\left(\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{2})})}\right)}{2}$$

(NB: tutti gli angoli sono espressi in radianti).

Studiando il limite di $\cos(\pi/2^k)$ per k che tende a infinito, o studiando la successione definita da $u_0 = 0$ e $u_{n+1} = \sqrt{(2 + u_n)}$:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots}}}}=2$$

In maniera più generale (Les Servi, *Nested Square Roots of 2*, 2003), prendiamo gli interi $b_1, b_2, \ldots, b_k$, e definiamo

$$\alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{b_k}{4} - \frac{b_k b_{k-1}}{8} - \frac{b_k b_{k-1} b_{k-2}}{16} - \ldots - \frac{b_k b_{k-1} \ldots b_1}{2^{k+1}}\right)\pi$$

(Ad esempio, per $k = 3$ e $b_1 = b_2 = b_3 = 1$ abbiamo $\alpha = \pi/16$).

Definiamo il valore $R(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ come:

$$R(b_k, b_{k-1}, \ldots, b_1) = \\ = \frac{b_k}{2}\sqrt{2 + b_{k-1}\sqrt{2 + b_{k-2}\sqrt{2 + \ldots + b_2\sqrt{2 + 2\sin(b_1\pi/4)}}}}$$

Di conseguenza:

$\cos(\alpha) = R(b_1, b_2, \ldots, b_k)$
$\sin(\alpha) = R(1, -b_{k-1}, b_{k-2}, b_{k-3}, \ldots, b_1)$ (per b_k diverso da zero)

Se ne deduce (prendendo tutti i b_k uguali a 1 e facendo tendere k a infinito):

$$\pi = \lim_{k \to \infty}\left(2^k \overbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}}}^{k \text{ radici quadrate}}\right)$$

$$\pi = \lim_{k \to \infty}\left(\frac{2^k}{3} \cdot \overbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}}}}}^{k \text{ radici quadrate}}\right)$$

$$\pi = \lim_{k \to \infty}\left(3 \cdot 2^{k-1} \cdot \overbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}}}}}}^{k \text{ radici quadrate}}\right)$$

$$\pi = \lim_{k \to \infty}\left(\frac{3}{5} \cdot 2^{k-1} \cdot \overbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{3}}}}}}}}^{k \text{ radici quadrate}}\right)$$

Abbiamo poi gli sviluppi in serie di $\sqrt{(1+x)}$ in $x = 1$, di $1/\sqrt{(1-x)}$ in $x = 1/2$, di $\sin(x)$ in $x = \pi/4$ e di $\cos(x)$ in $x = \pi/4$:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots$$

$$\sqrt{2} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right) \cdot \frac{1}{2^2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right) \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2}{1 \cdot 2} + \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{\left(\frac{\pi}{4}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

Ecco uno sviluppo in frazione continua ascendente «esotica», a partire dalla relazione $\sqrt{2} = (7/5)/\sqrt{(49/50)}$ e dallo sviluppo in serie di $1/\sqrt{(1-x)}$in $x = 1/50$ (Eulero, *Institutiones calculi differentialis*, 1755):

$$\frac{5}{7} \cdot \sqrt{2} = 1 + \cfrac{1 + \cfrac{1 \cdot 3 + \cfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 + \cfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + \ldots}{400}}{300}}{200}}{100}$$

Servendoci dell'espressione di $\cos(x)$ in prodotto infinito, abbiamo:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \left(1 - \frac{1}{4 \cdot 1^1}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4 \cdot 5^2}\right)\ldots$$

$$\sqrt{2} = \left(\frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3}\right)\left(\frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7}\right)\left(\frac{10 \cdot 10}{9 \cdot 11}\right)\left(\frac{14 \cdot 14}{13 \cdot 15}\right)\ldots$$

$$2 + \sqrt{2} = 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4}\right)^2 \left(\frac{11 \cdot 13}{12 \cdot 12}\right)^2 \left(\frac{19 \cdot 21}{20 \cdot 20}\right)^2 \left(\frac{27 \cdot 29}{28 \cdot 28}\right)^2 \ldots$$

Per finire, qualche altra formula in cui compare il numero π:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \dots$$

(Eulero, *Introductio in analysin infinitorum*, 1748)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

(Ramanujan, *Modular Equations and Approximations to π*, 1913-14)

$$\frac{\pi}{2} = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Ancora una dimostrazione dell'irrazionalità della radice quadrata di 2: se $\sqrt{2}$ è razionale, allora esiste il più piccolo intero positivo non nullo, q, tale che $q\sqrt{2}$ è un numero intero (che chiameremo p). Allora, dato che $(p-q)\sqrt{2} = p\sqrt{2} - q\sqrt{2} = (q\sqrt{2})\sqrt{2} - p = 2q - p$, anche l'intero $(p-q)$ è tale da rendere intero $(p-q)\sqrt{2}$. Ora, si deduce facilmente dalla relazione $q\sqrt{2} = p$ che $p - q$ è un intero positivo non nullo minore di q, contraddicendo così l'ipotesi iniziale su q.

La velocità di fuga di un satellite (la minima velocità iniziale con la quale il satellite deve allontanarsi dalla Terra per non ricadervi) è $\sqrt{2}$ volte più elevata di quella di un satellite immesso sull'orbita circolare più bassa possibile.

Il «manoscritto Voynich» è forse il manoscritto più misterioso al mondo: in quattro secoli, nessuno è riuscito a decifrarlo. Il formato dei fogli che lo compongono è 22,5 per 16 cm, cioè quello di un rettangolo diagonale: sarà un caso?

Se costruito correttamente, un cristallo può avere un ruolo di «trappola» per la luce. Negli anni novanta, la collaborazione di alcuni gruppi di ricerca, appartenenti a laboratori di tutto il mondo, ha messo a punto una trappola del genere, che funziona solo con un cristallo il cui indice di rifrazione n è il più vicino possibile a $\sqrt{2}$ (pur rimanendo inferiore a tale valore) – in pratica, si utilizzano il fluoruro di litio e il fluoruro di magnesio.

Nel 1909, Borel fa notare che «si sa che il valore medio teorico della somma algebrica di due errori è uguale al prodotto per $\sqrt{2}$ della media teorica di ciascuno dei due errori». In un contesto non dissimile, se vogliamo sapere il valore teorico della raffica di ven-

to più violenta in una tempesta, dobbiamo moltiplicare per $\sqrt{2}$ il valore medio dei dati relativi alla forza del vento. Per concludere, la funzione più «centrale» della teoria delle probabilità è la «curva a campana», definita a partire dalla funzione che associa a ogni numero x la quantità $e^{-(x/\sqrt{2})^2}$.

Passando ai «numeri complessi», un'estensione astratta del concetto di numero, ci si può interessare alla radice quadrata di 2 attraverso il cosiddetto «insieme di Julia della trasformazione che associa a ogni z la quantità $z^2 - 2$», cioè l'insieme dei punti per i quali la ripetizione di questa trasformazione non diverge all'infinito.

Un'ulteriore estensione del concetto di numero, che si spinge al di là dei numeri complessi, è quella dei «quaternioni», che possiamo descrivere, scegliendo tra le varie definizioni possibili, come «matrici di norma $\sqrt{2}$ del gruppo speciale lineare di dimensione 2».

E tanto altro ancora...

Bibliografia

Abas, Syed e Salman, Amer Chaker, *Symmetries of Islamic Geometrical Patterns*, World Scientific, Singapore 1995.
Abraham, Gerald (a cura di), *The New Oxford History of Music*, VI: *Concert Music 1630-1750*, Oxford University Press, Oxford 1986 [trad. it. *Storia della musica*, VI: *Musica da concerto 1630-1750*, Feltrinelli, Milano 1991].
Adamczewski, Boris, Bugeaud, Yann e Florian, Luca, *Sur la complexité des nombres algébriques*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 339, 2004, pp. 11-14.
Alberti, Leon Battista, *De re aedificatoria*, 1452 [trad. it. *L'architettura*, a cura di Giovanni Orlandi, Il Polifilo, Milano 1989].
Alessandro di Afrodisia, *Alexandri in Aristotelis Analyticorum priorum, librum I commentarium*, a cura di Maximilian Wallies, Reimer, Berolini 1883.
– *On Aristotle's Prior Analytics 1.23-46*, a cura di Ian Mueller, Duckworth, London 2006.
Allman, George, *Greek Geometry from Thales to Euclid*, Hodges, Figgis & C., Dublin 1889.
Aristotele, *Analitici primi*, in Id., *Organon*, a cura di Giorgio Colli, Adelphi, Milano 2003.
Baïda, Pierre-Éric, Bertholdy, Patrick e Cégretin, Michel, *Le Zone système. Introduction à une méthode photographique*, Contrejour, Paris 1993.
Bailey, David, Borwein, Peter e Plouffe, Simon, *On the Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, in «Mathematics of Computation», 66, 1997, pp. 903-13.
Bailey, David, Borwein, Jonathan, Crandall, Richard e Pomerance, Carl, *On the Binary Expansions of Algebric Numbers*, in «Journal de la théorie des nombres de Bordeaux», 16, 2004, pp. 487-518.
Barbin, Évelyne e Le Goff, Jean-Pierre (a cura di), *Si le nombre m'était conté*, Ellipses, Paris 2000.
Barthélémy, Pierre (a cura di), *Le Code Voynich. Le manuscrit MS 408 de la Beinecke Rare Book and Manuscript Library, Yale University: le manuscrit le plus mysterieux du monde*, J.-C. Gawsewitch, Paris 2005.

Beardon, Alan, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, New York 1983.
Beigel, Richard, *Irrationality without Number Theory*, in «The American Mathematical Monthly», 98, 1991, pp. 332-35.
Berggren, Lennart, Borwein, Jonathan e Borwein, Peter, *P. A Source Book*, Springer, New York 2004.
Beyer, William, Metropolis, Nicholas e Neergaard, J. R., *Square Roots of Integers 2 to 15 in Various Bases 2 to 10: 88 062 Binary Digits or Equivalent*, in «Mathematics of Computation», 23, 1969, p. 679.
– *Statistical Study of Digits of Some Square Roots of Integers*, in «Mathematics of Computation», 24, 1970, pp. 455-73.
– *The Generalized Serial Test Applied to Expansions of Some Irrational Square Roots in Various Bases*, in «Mathematics of Computation», 24, 1970, pp. 745-47.
Biard, Joël e Celeyrette, Jean (a cura di), *De la théologie aux mathématique. L'infini au* XIV*e* *siècle*, Les Belles Lettres, Paris 2005.
Bolzano, Bernard, *Paradoxien des Unendlichen*, Reclam, Leipzig 1851 [trad. it. *I paradossi dell'infinito*, a cura di Alberto Conte, Bollati Boringhieri, Torino 2003].
Boorman, Marcus, *Square-Root Notes*, in «The Mathematical Magazine», 1, 1887, pp. 207-08.
Borel, Émile, *Les Probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, in «Rendiconto del Circolo Matematico di Palermo», 27, 1909, pp. 247-70.
– *Sur l'emploi de la méthode différentielle pour la comparaison des statistiques*, in «Bulletin de l'Institut International de Statistiques», 18, 1909, pp. 283-88.
– *Sur les probabilités universellement négligeables*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 190, 1930, pp. 537-40.
– *Sur l'imitation du hasard*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 204, 1937, pp. 203-05.
– *Sur les chiffres décimaux de* $\sqrt{2}$ *et divers problèmes de probabilités en chaîne*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 230, 1950, pp. 591-93.
Brent, Richard, *Fast Multiple-Precision Evaluation of Elementary Functions*, in «Journal of the Association of Computing Machinery», 23, 1976, pp. 242-51.
Brezinski, Claude, *History of Continued Fractions and Padé Approximants*, Springer, Berlin-New York 1991.
Bruins, Evert, *La Construction des tables numériques en Mésopotamie*, in Paul Benoît, Karine Chemla e Jim Ritter (a cura di), *Histoire de fractions, fractions d'histoire*, Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 1992.
Brun, Jean, *Aristote et le Lycée*, PUF, Paris 1997.
Bruter, Claude-Paul, *La Construction des nombres*, Ellipses, Paris 2000.
Bugeaud, Yann, *Nombres de Liouville et nombres normaux*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 335, 2002, pp. 117-20.
Burger, Edward, *On Newton's Method and Rational Approximations to Quadratic Irrationals*, in «Bulletin canadien de mathématiques», 47, 2004, pp. 12-16.
Carrega, Jean-Claude, *Théorie des corps. La régle et le compas*, Hermann, Paris 1997.

Cauchy, Augustin, *Démonstration d'un théorème curieux sur les nombres*, in «Bulletin de la Société Philomatique», 3, 1816, pp. 133-35.

Caveing, Maurice, *L'Irrationalité dans les mathématiques grecques jusqu'à Euclide*, Presses Universitaires du Septentrion, Paris 1998.

Cayley, Arthur, *On the Theory of the Analytical Forms Called Trees*, in «Philosophical Magazine», 13, 1857, pp. 172-76.

Champernowne, David, *The Construction of Decimals Normal in the Scale of Ten*, in «Journal of the London Mathematical Society», 8, 1933, pp. 254-60.

Chrystal, George, *Algebra. An Elementary Text-Book for the Higher Classes of Secondary Schools and for Colleges*, I, Chelsea, New York 1952[6].

Collette, Jean-Paul, *Histoire des mathématiques*, Renouveau Pédagogique, Montréal 1973.

Coutsal, René, *Calcul de $\sqrt{2}$, et réflexion sur une espérance mathématique*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 230, 1950, pp. 431-32.

Cox, David, *The Arithmetic-Geometric Mean of Gauss*, in «L'Enseignement mathématique», 30, 1984, pp. 275-330.

Cunliffe, John, *I Name This Shape...*, in «British Origami», 75, 1979, p. 12.

Davenport, Harold ed Erdős, Paul, *Note on Normal Decimals*, in «Canadian Journal of Mathematics», 4, 1952, pp. 58-63.

Delacressonnière, Bruno e More, Christophe, *Électronique. 1re année*, Technique & Documentation-Lavoisier, Paris 1995.

Delmas-Rigoutsos, Yannis e Lalement, René, *La Logique ou L'art de raisonner*, Le Pommier-Fayard, Paris 2000.

Demaine, Erik, *Origami*, 2001 (http://snipurl.com/v5vcm).

Devlin, Keith, *The Millennium Problems. The Seven Greatest Unsolved Mathematical Puzzles of Our Time*, Basic Books, New York 2002 [trad. it. *I problemi del millennio*, Longanesi, Milano 2004].

– *The Math Instinct. Why You're a Mathematical Genius*, Thunder's Mouth Press, New York 2005 [trad. it. *L'istinto matematico. Perché sei anche tu un genio dei numeri*, Cortina, Milano 2007].

Dhombres, Jean, *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*, Cedic/Nathan, Paris 1978.

Dhombres, Jean, Dahan-Dalmedico, Amy, Bkouche, Rudolf, Houzel, Christian e Guillemot, Michel (IREM-Groupe Épistémologie et Histoire), *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris 1987.

Djebbar, Ahmed, *Mathématiques et société à travers un écrit maghrébin du XIVe siècle*, in AA.VV., *De la Chine à l'Occitanie, chemins entre arithmétique et algèbre. Actes du Colloque International de Tolouse, 22-24 septembre 2000*, Éditions du CISHO, Toulouse 2003, pp. 29-54.

Drmota, Michael e Tichy, Robert, *Sequences, Discrepancies and Applications*, Springer, New York 1997.

Dupain, Yves e Sós, Vera, *On the Discrepancy of ($n\alpha$) Sequences. Topics in Classical Number Theory. Colloquium, Budapest 1981*, in «Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai», 34, 1984, pp. 355-87.

Dutka, Jacques, *The Square Root of 2 to 1000000 decimals*, in «Mathematics of Computation», 25, 1971, pp. 927-30.

El-Saïd, Issam, *Islamic Art and Architecture. The System of Geometric Design*, Garnet, Reading 1993.

Eschilo, *Prometeo incatenato*, a cura di Enzo Mandruzzato, Rizzoli, Milano 2006.

Euclide, *Gli elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, UTET, Torino 1996.

Euler, Leonhard, *Introductio in analysin infinitorum*, Bousquet, Lausanne 1748.

– *Institutiones calculi differentialis*, ex officina Michaelis, Berolini 1755.

Falbo, Clement, *The Golden Ratio. A Contrary Viewpoint*, in «College Mathematics Journal», 36, 2005, pp. 123-24.

Flannery, David, *The Square Root of Two. A Dialogue Concerning a Number and a Sequence*, Copernicus, New York 2005.

Fletcher, Rachel, *An American Vision of Harmony. Geometric Proportions in Thomas Jefferson's Rotunda at the University of Virginia*, in «Nexus Network Journal», 5, 2003, pp. 7-47.

Floyd, Robert, *What Else Pythagoras Could Have Done*, in «The American Mathematical Monthly», 96, 1989, p. 67.

Fogg, Pytheas N., *Substitutions in Dynamics, Arithmetics and Combinatorics*, Springer, Berlin-New York 2002.

Fontenelle, Bernard de, *Éléments de la géométrie de l'infini*, Imprimerie royale, Paris 1727.

Fowler, David, *The Mathematics of Plato's Academy. A New Reconstruction*, Clarendon Press, Oxford 1987.

Frings, Marcus, *The Golden Section in Architectural Theory*, in «Nexus Network Journal», 2002, pp. 9-32.

Fritz, Kurt von, *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*, in «Annals of Mathematics», 46, 1946, pp. 242-64.

Ghyka, Matila, *Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*, Gallimard, Paris 1941.

Giamblico, *La vita pitagorica*, a cura di Maurizio Giangiulio, Rizzoli, Milano 2001.

Good, Irving e Gover, Tim, *The Generalized Serial Test and the Binary Expansion of* $\sqrt{2}$, in «Journal of the Royal Statistical Society», serie A, 130, 1967, pp. 102-07.

– *Errata Corrige*, in «Journal of the Royal Statistical Society», serie A, 131, 1968, p. 434.

Goodwin, Edward, *Quadrature of the Circle*, in «The American Mathematical Monthly», 1, 1894, pp. 246-47.

Gourdon, Xavier e Sebah, Pascal, *Numbers, Constants, and Computation*, 2003 (http://snipurl.com/v6ag8).

Gourdon, Xavier e Salvy, Bruno, *Computing One Million Digits of* $\sqrt{2}$, in «The Maple Technical Newsletter», 10, 1993, pp. 60-71.

Gourévitch, Boris, *La Quête des decimales de đ*, in «Gazette des Mathématiciens», 102, 2004, pp. 29-52.

Graham, Ronald, Knuth, Donald e Patashnik, Oren, *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Boston 1991 [trad. it. *Matematica discreta. Principi matematici per l'informatica*, Hoepli, Milano 1992].

Griffith, Francis, *Notes on Egyptian Weights and Measures*, in «Proceedings of the Society of Biblical Archeology», 14, 1892, pp. 403-45.

Guichard, Jean-Paul, *Histoire de symboles*, IREM de Poitiers, Poitiers 2003.

Hairer, Ernst e Wanner, Gerhard, *Analysis by Its History*, Springer, New York 1996.

Halphén, Georges-Henri, *Sur des suites de fractions, analogues à la suite de Farey*, in «Bulletin de la Société Mathématique de France», 5, 1877, pp. 170-75.

Hambidge, Jay, *The Elements of Dynamic Symmetry*, Yale University Press, New Haven 1919.

Hamilton, Edith, *La Mythologie. Ses dieux, ses heros, ses legendes*, Marabout, Paris 1978.

Hardy, Godfrey e Wright, Edward, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford 1960.

Hauchecorne, Bertrand, *Les Mots & les maths. Dictionnaire historique et étymologique du vocabulaire mathématique*, Ellipses, Paris 2003.

Helbig, Max e Hennig, Wilfred, *DIN-Format A4. Ein Erfolgssystem in Gefahr*, Beuth, Berlin-Köln 1988.

Hensel, Kurt, *Zahlentheorie*, Göschen, Berlin-Leipzig 1913.

Herbin, René e Pebereau, Alexandre, *Le Cadastre français*, F. Lefebvre, Paris 1953.

Høyrup, Jens, *Lengths, Widths, Surfaces. A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer, New York 2002.

Hughes, Gerard, *Envelope and Letter Folding*, 1999 (http://snipurl.com/v6cva).

Huntley, Herbert Edwin, *The Divine Proportion. A Study in Mathematical Beauty*, Dover Publications, New York 1970.

Jean, Yves e François Volatron, *Structure électronique des molécules*, Dunod, Paris 2003.

Junqua, Roger, *Fais ton hélice*, in «Les Cahiers du RSA (Réseau du Sport de l'Air)», 133, 1983, pp. 1930-32.

Kahane, Jean-Pierre, *À propos de Théétète*, in «Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales», 202, 2003.

Kanada, Yasumasa, *Nous vérifions les performances des ordinateurs*, in «La Recherche», 392, 2005, p. 34.

Kennedy, John, RPN *Perspective*, in «PPC Calculator Journal», 9, 1982, pp. 26-29.

Kepler, Johannes, *Harmonices mundi* (1619), Forni, Bologna 1969.

Klar, Amar, *Fibonacci's Flowers*, in «Nature», 417, 2002, p. 595.

Knorr, Wilbur, *The Evolution of Euclidean Elements*, Reidel, Dordrecht 1975.

– *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Birkhäuser, Boston 1986.

– *The Impact of Modern Mathematics on Ancient Mathematics*, in «Revue d'Histoire des Mathématiques», 7, 2001, pp. 121-35.

Knott, Ron, *A Continued Fraction Calculator*, 2003-06 (http://snipurl.com/v6d44).

Knuth, Donald, *The Art of Computer Programming*, I, Addison-Wesley Professional, Reading 1998.

Kochowski, Claude e Loucatos, Sotiris, *Un saphir pour révéler la beauté*, in «Scintillations», 23, 1995, pp. 1-3.

Koksma, Jurjen Ferdinand, *Een Algemeene stelling uit de theorie der gelijkmatige verdeeling modulo 1*, in «Mathematica, Zutphen. B.», 11, 1942, pp. 7-11.

Komatsu, Takao, *Continued Fractions and Newton's Approximations, II*, in «The Fibonacci Quarterly», 39, 2001, pp. 336-38.

Kondo, Shigeru, *La radice quadrata di 2* (in giapponese), 2005 (http://snipurl.com/v6da9).

– *Pi World of JA0HXV*, 2005 (http://snipurl.com/v6dba).

Korzybski, Alfred, *Science and Sanity. An Introduction to Non-Aristotelian Systems and General Semantics*, The International Non-Aristotelian Library, Lakeville 1933.

Kuhn, Marcus, *International Standard Paper Sizes*, 2005 (http://snipurl.com/v6dcm).

Kuipers, Lawrence e Niederreiter, Harald, *Uniform Distribution of Sequences*, Wiley, New York 1974.

Laboulaye, Charles, *Traité de cinématique théorique et pratique ou théorie des mécanismes*, Librairie du Dictionnaire des arts et manufactures, Paris 1878.

Lagrange, Louis, *Œuvres*, a cura di Joseph-Alfred Serret, Gauthiers-Villars, Paris 1867-92, 14 voll.

Lal, Mohan, *Expansion of $\sqrt{2}$ to 19 600 Decimals*, in «Mathematics of Computation», 21, 1967, pp. 258-59.

Lal, Mohan e Lunnon, Fred, *Expansion of $\sqrt{2}$ to 100 000 Decimals*, in «Mathematics of Computation», 22, 1968, pp. 899-900.

Lambert, Johann, *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendentes circulaires et logarithmiques*, in «Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin», 17, 1768, pp. 265-322.

Lebesgue, Henri, *Sur certaines démonstrations d'existence*, in «Bulletin de la Société Mathématique de France», 45, 1917, pp. 132-44.

Lehning, Hervé, *Optimisation: le tipi idéal*, in «Tangente, l'aventure mathématique», fuori collana 16, 2003, pp. 74-77.

Leonardo da Vinci, *I taccuini*, a cura di Anna H. Suh, Gribaudo-Parragon, Savigliano-Bath 2006.

Lichtenberg, Georg Christoph, *Briefwechsel*, a cura di Ulrich Joost e Albrecht Schone, III: *1785-1792*, C. H. Beck, München 1990.

Liouville, Joseph, *Sur des classes très-étendues de quantités dont la valeur $\sqrt{2}$ n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 18, 1844, pp. 883-85 e pp. 910-11.

Lister, David, *The A4 Rectangle* (http://snipurl.com/v6djt).

Łukasiewicz, Jan, *Elements of Mathematical Logic*, Pergamon Press, London-New York 1963.

Martini, Francesco di Giorgio, *Trattati di architettura, ingegneria e arte militare*, a cura di Corrado Maltese, Il Polifilo, Milano 1967, 2 voll.
Mathonière, Jean-Michel, *Le plus noble et le plus juste fondement de la taille de la pierre*, in «La Règle d'Abraham», 3, 1997.
Mattéi, Jean-François, *Pythagore et les pythagoriciens*, PUF, Paris 1996.
Mitrovic, Branko, *Andrea Palladio's Villa Cornaro in Piombino Dese*, in «Nexus Network Journal», 6, 2004.
Mozzati, Luca, *Islam*, Electa, Milano 2005.
Naux, Charles, *Histoire des logarithmes de Neper à Euler*, Blanchard, Paris 1966.
Needham, Joseph, *The Grand Titration. Science and Society in East and West*, Allen & Unwin, London 1969 [trad. it. *Scienza e società in Cina*, il Mulino, Bologna 1973].
– *Science and Civilisation in China*, III: *Mathematics and the Sciences of the Heavens and the Earth*, Cambridge University Press, Cambridge 1959 [trad. it. *Scienza e civiltà in Cina*, III: *La matematica e le scienze della terra*, Einaudi, Torino 1985].
Nemiroff, Robert e Bonnell, Jerry, *RJN'2 More Digits of Irrational Numbers Page* (http://snipurl.com/v6dvb).
Neugebauer, Otto, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, Springer, New York 1975.
Neugebauer, Otto e Sachs, Abraham, *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, New Haven 1945.
Neveux, Marguerite, *Le Nombre d'or. Radiographie d'un mythe*, Seuil, Paris 1995.
– *Les Aventures du nombre d'or 1927-1995. Genèse d'un mythe*, in «Alliage», 31, 1997, pp. 95-104.
Niederreiter, Harald, *Random Number Generation and Quasi-Monte-Carlo Methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia 1992.
Palladio, Andrea, *I quattro libri dell'architettura*, a cura di Licisco Magagnato e Paola Marini, Il Polifilo, Milano 1980.
Pecker, Jean-Claude (a cura di), *Astronomie*, Flammarion, Paris 1985.
Pichot, André, *La Naissance de la science*, I: *Mésopotamie, Égypte*, II: *Grèce présocratique*, Gallimard, Paris 1991 [trad. it. *La nascita della scienza. Mesopotamia, Egitto, Grecia antica*, Dedalo, Bari 1993].
Piero della Francesca, *De prospectiva pingendi*, a cura di Giusta Nicco Fasola, Le Lettere, Firenze 2005.
Pincus, Steve e Kalman, Rudolf, *Not All (Possibly) «Random» Sequences Are Created Equal*, in «Proceedings of the National Academy of Sciences USA», 94, 1997, pp. 3513-18.
Platone, *Opere complete*, Laterza, Roma-Bari 1991-93, 9 voll.
Plouffe, Simon, *L'Inverseur de Plouffe*, 1999 (http://snipurl.com/v6e9j).
Poincaré, Henri, *Sur une généralisation des fractions continues*, in «Comptes rendus de l'Académie des Sciences», 99, 1884, pp. 1014-16.

Pouvreau-Séjourné, David, *Trigonométrie et «développement en série» en Inde médievale*, IREM de Toulouse, Toulouse 2003.

Prony, Gaspard de, *Instruction élémentaire sur les moyens de calculer les intervalles musicaux*, Firmin Didot Frères, Paris 1882.

Queffelec, Martine, *Substitution, Dynamical Systems, Spectral Analysis*, Springer, Berlin-New York 1987.

Rademacher, Hans, *Lectures on Elementary Number Theory*, Blaisdell, New York 1964.

Rademacher, Hans e Töplitz, Otto, *Von Zahlen und Figuren*, J. Springer, Berlin 1930.

Ramanujan, Srinivasa Aiyangar, *Modular Equations and Approximations to π*, in «Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics», 45, 1913-14, pp. 350-72.

Rashed, Roshdi, *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*, Les Belles Lettres, Paris 1984.

– (a cura di), *Histoire des sciences arabes*, Seuil, Paris 1997, 3 voll.

Reid, Constance, *Hilbert*, Springer, Berlin-New York 1970.

Rieger, Georg, *The Golden Section and Newton Approximation*, in «The Fibonacci Quarterly», 37, 1999, pp. 178-79.

Rittaud, Bênoit, *Arithmetical Subsequences of Convergents of a Quadratic Irrational Obtained by Newton's Method*, in corso di pubblicazione su «The Fibonacci Quarterly».

Rivard, Dominique-François, *Abrégé des éléments de mathématiques*, Lottin Desaint & Saillant, Paris 1744.

Robson, Eleanor e Fowler, David, *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC in Context*, in «Historia Mathematica», 25, 1998, pp. 366-78.

Rodet, Léon, *Leçons de calcul d'Aryabhata*, Imprimerie nationale, Paris 1879.

Rosen, David, *A Class of Continued Fractions Associated with Certain Properly Discontinuous Groups*, in «Duke Mathematical Journal», 21, 1954, pp. 549-63.

Rosenfeld, Leon, *Le problème logique de la définition des nombres irrationnels*, in «Isis», 9, 1927, pp. 345-58.

Sagher, Yoram, *What Pythagoras Could Have Done*, in «The American Mathematical Monthly», 95, 1988, p. 117.

Salamin, Eugene, *Computation of $\sqrt{2}$ Using Arithmetic-Geometric Mean*, in «Mathematics of Computation», 30, 1976, pp. 565-70.

Schneider, Michael, *Geometry of a Herter Brothers Cabinet*, 2003 (http://snipurl.com/v6f34).

Schneider, Peter, *The Puzzle of the First Square in Ancient Egyptian Architecture*, in José Francisco Rodriguez e Kim Williams (a cura di), *Nexus IV: Architecture and Mathematics*, Kim Williams Books, Fucecchio 2002, pp. 207-21.

Séchan, Louis, *Mythologie et réligion*, in *Le Grand Bailly. Dictionnaire Grec-Français*, Hachette, Paris 2000.

Sélamé, Jacques, *3 minutes 14 de bonheur*, in «Tangente, l'aventure mathématique», 58-59, 1997.
Serlio, Sebastiano, *L'architettura*, a cura di Francesco Paolo Fiore, Il Polifilo, Milano 2001.
Serret, Joseph-Alfred, *Sur le développement en fraction continue de la racine carrée d'un nombre entier*, in «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées», 12, 1847, pp. 518-20.
Sérusier, Paul, *ABC de la peinture*, La Douce France, Paris 1921.
Servi, Les, *Nested Square Roots of 2*, in «The American Mathematical Monthly», 110, 2003, pp. 326-30.
Sharp, John, *Spirals and the Golden Section*, in «Nexus Network Journal», 4, 2002, pp. 59-82.
Sierpiński, Wacław, *Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre*, in «Bulletin de la Société Mathématique de France», 45, 1917, pp. 125-32.
Smith, Henry, *Note on Continued Fractions*, in «Messenger of Mathematics Series 2», 6, 1876, pp. 1-14.
Steinhaus, Hugo, *Mathematical Snapshots*, Oxford University Press, New York 1969 [trad. it. *Matematica per istantanee*, Zanichelli, Bologna 1994].
Stern, Moritz, *Über eine zahlentheorische Funktion*, in «Journal für die reine und angewandte Mathematik», 55, 1858, pp. 193-220.
Szabó, Árpád, *Les Débuts des mathématiques grecques*, Vrin, Paris 1977.
Takahashi, Daisuke, *Fast Multiple-Precision Arithmetic on distributed Memory Parallel Computers and its Applications*, tesi, Università di Tokyo, 1998.
Takahashi, Koki e Sibuya, Maasaki, *Statistiche dei decimali di* $\sqrt{n}$ (in giapponese), in «Joho Shori», 6, 1965.
– *The Decimal and Octal Digits of* $\sqrt{n}$, in «Mathematical Tables and Other Aids to Computation», 21, 1967, pp. 259-60.
Tannery, Paul, *De la solution géométrique des problèmes de second degré avant Euclide*, in «Mémoires de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux», 4, 1882, pp. 395-416.
Teone di Smirne, *Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*, a cura di Jean Dupuis, Hachette, Paris 1892.
Trong Anh, Nguyen, *Introduction à la chimie moléculaire*, Ellipses, Paris 1994.
Uhler, Horace, *Many-Figure Approximations to* $\sqrt{2}$*, and Distribution of Digits of* $\sqrt{2}$ *and* $1/\sqrt{2}$, in «Proceedings of the National Academy of Sciences USA», 37, 1951, pp. 63-67.
Ulam, Stanisław, Stein, Myron e Wells, Mark, *A Visual Display of Some Properties of the Distribution of Primes*, in «The American Mathematical Monthly», 71, 1964, pp. 516-20.
Varadarajan, Veeravalli, *Algebra in Ancient and Modern Times*, American Mathematical Society, Providence 1998.
Viète, François, *Œuvres mathématiques*, a cura di Jean Peyroux, Blanchard, Paris 1991-92, 2 voll.

Vitruvio, *De architectura*, Studio Tesi, Pordenone 2008.

Voltaire, *Opere*, Sansoni, Milano 1993.

Vuillemin, Jules, *Mathématiques pythagoriciennes et platoniciennes*, Blanchard, Paris 2001.

Wantzel, Pierre-Laurent, *Recherches sur les moyens de reconnaître si un problème de géometrie peut se résoudre avec la règle et le compas*, in «Journal de Mathématiques Pures et Appliquées», 1, 1837, pp. 366-72.

Waterhouse, William, *Why Square Roots Are Irrational*, in «The American Mathematical Monthly», 93, 1986, pp. 213-14.

White, John, *Duccio. Tuscan Art and the Medieval Workshop*, Thames and Hudson, London 1979.

Williams, Kim, *Michelangelo's Medici Chapel. The Cube, the Square and the Root-2 Rectangle*, in «Leonardo», 30, 1997, pp. 105-12.

Wittkower, Rudolf, *Architectural Principles in the Age of Humanism*, Tiranti, London 1952 [trad. it. *Principi architettonici nell'età dell'Umanesimo*, Einaudi, Torino 1971].

Wuilbaut, Alain, *Obturateurs et diaphragmes, une question de carrés*, in «Infophoto», 164, 2005.

Zeuthen, Hyeronimus, *Théorème de Pythagore, origine de la géométrie scientifique*, in AA.VV., *Extrait des Comptes Rendus du IIme Congrès international de Philosophie. Genève, Septembre 1904*, H. Kündig, Genève 1905, pp. 853-54.

Indice delle dimostrazioni dell'irrazionalità di $\sqrt{2}$

Indice analitico